LES TAUTOLOGIES EN LOGIQUE FORMELLE

ALBERT TORTRAT

La poursuite de la quête commencée dans [0] nous a fait percevoir, croyons-nous, de sérieuses incohérences presque toutes basées sur une erreur de base dans la définition des tautologies, τ: la lecture de l'inférence $A \Rightarrow B$ dans un modèle, *et* dans un transfert de principe, postulé sans analyse sérieuse, dans le domaine formel, soit les τ'. L'une de ces τ' miracle (si utile !) affecte les bases de la Logique Formelle. Nous recherchons une vraie réponse à ces difficultés.

AMS 2000 Subject Classification: 03B05, 03C62.

Key words: tautologie, modèle, théorie.

Ce texte fait suite à celui, que nous notons [0], voir la bibliographie. Nous maintenons la même quête, à la fois de rigueur et de recherche du sens des Logiques Formelles, dans ce qu'elles peuvent apporter aux Mathématiques. Nous le faisons, croyons-nous, avec la même humilité, partant de notre admiration pour le traité de Cori et Lascar ([4] et [5]), unique en langue française, base des incohérences, très rares certes mais cruciales, que nous sommes obligés de relever, toujours dans l'attente de réponses constructives à nos questions. Celles-ci s'ajoutent à celles posées dans [0].

1. **L'ARCHITECTURE DE [4], [5]**

(a) Deux chapitres introduisent le traité. Ils concernent les "formules propositionnelles" définies pages 17–18 (de [4]) comme le plus petit ensemble de mots, formés à partir de (lettres de longueur 1) variables propositionnelles (en nombre fini ou infini), notées $A_1, \dots A_n$ ou $B, C, \dots$, à l'aide des cinq signes logiques $\rceil, \vee, \wedge \Rightarrow, \Leftrightarrow$, lus: négation, ou, et, implique, équivaut à.

Variables et formules prennent seulement deux valeurs, notées 1 et 0. La valeur d'une formule F est définie par celles des A_i qui la constituent, c.à.d. de la distribution notée δ, de "valeurs de vérité" qu'elles constituent, $\delta(F)$ notant la valeur 1 ou 0 qui en résulte pour F.

REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL., **53** (2008), *4*, 357–374

Nous sommes donc dans une logique binaire particulière que nous nommerons “modèle de type 1.”. Il est sous-entendu dans cette appellation, et nous le rappellerons au besoin, qu'elle est stricte ou exclusive, c.à.d. que $A \wedge \rceil A$ et $F \wedge \rceil F$ n'ont jamais lieu, sont exclus. Comme dans [0], et pour la clarté, nous n'emploierons plus que les lettres A, B, C pour les formules propositionnelles. Ainsi p. 42, précédant une liste de tautologies (τ abrège toujours ce mot) écrites avec A, B, C, variables propositionnelles, il est dit qu'on peut leur substituer des formules quelconques.

Nous réservons $F, G, H, \ldots$ pour les formules d'un “Système Formel” ou théorie T, définies dans un langage L beaucoup plus riche, par des axiomes, notés $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ Alors la démonstration (formelle) de F par T (notée $T \vdash F$, ou $\vdash F$) concerne la déduction de F à partir des axiomes. Elle obéit à des règles de déduction très pauvres (p. 229): $\{A_1 \vee \cdots \vee A_n\} \Rightarrow F$ est une formule dont on réduit la $\vdash$ (p. 232) à des pas successifs: des déductions à partir de une ou deux F déjà $\vdash$. S'y ajoutent les axiomes logiques: universellement valides (dans tout L et toute T), telles les tautologies qui sont ici obtenues par substitutions dans les précédentes (pp. 42 à 44), aux formules propositionnelles $A_1, \ldots, A_i$, de formules $G_1, \ldots, G_i$ quelconques, pourvu que ce soient des formules du langage $L : F \in \mathcal{F}(L)$.

$$\text{Exemple p. 234} \qquad \text{“}F \overset{\tau' 28}{\Longrightarrow} (\rceil F \Rightarrow G) \text{ est une tautologie.”}$$

Notée τ_{28}, p. 43, nous l'écrivons τ_{28} dans un langage formel L, pour bien distinguer le cadre formel des chapitres 3 à 7, du modèle 1. Nous dirons qu'on est dans le modèle formel, celui d'une théorie T (dans le langage L).

(b) Les modèles d'une théorie T. nous les dirons du type 2. Ils concernent les F closes: toutes les variables qui y figurent y sont attribuées par l'un des signes $\exists\nu$, ou $\forall\nu$, au domaine de base M (D dans la notation de Kleene [10]) d'un modèle $\mathcal{M}$ de T. Par définition les axiomes sont des formules closes vraies dans tout M: “il existe dans M”, ou “pour tout point de M, on a” concerne une variable ν de L. Et pour chaque M, F est vraie ou non. Les considérations ci-dessus pour le modèle 1. valent encore, à ceci près que la validation de F n'a rien à voir avec les “tables de vérité” de 1.

Mais une autre différence fondamentale de ce type 2. est qu'à une F (qu'on a close) s'offrent en général de nombreux modèles, très abstraits (cf. [3, p. 28]). La démarche initiale des logiciens part d'un 3^{e} modèle, que nous dirons de type 3.: c'est celui des mathématiciens mais aussi celui de la langue de chacun (dite vernaculaire). Les logiciens disent aussi “de la métamathématique”, désignant la langue avec laquelle ils construisent la (les) Logique Formelle. Ils qualifient volontiers de domaine intuitif ce domaine 3. initial.

Nous dirons que cette démarche, partant de 3., conduit à des théories formelles T, avec une ambiguïté: jugeant les fondements des mathématiques incertains (sur certains points essentiels) on veut les assurer en formalisant tous leurs raisonnements. Il y a alors une déduction unique des F: “on pense en intuitif et l’on écrit en formel – dans le cas de la théorie des ensembles comme dans celui de la géométrie” et “Gödel commente maintes fois dans l’intuitif ses preuves formelles” nous écrit Marcel Guillaume.

(c) Mais on saute de 3. unique à tous les modèles de T. Ainsi une formule mathématique, dans N (des entiers ordinaires), résultant par exemple d’une numérotation très ingénieuse dite “arithmétisation des formules de T – et de leur $\vdash$ éventuelle”, et exprimant l’absence d’incohérence dans T, est transformée en une F la représentant formellement, c.à.d. qui s’identifie à elle lorsque les variables $\nu_1, \ldots, \nu_p$ d’une $F(\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_p)$, $\in N$, mais dont la signification (cf. [8] ce c) de 2.4, p. 177 dans [0]) est quasi absente dans tout modèle non standard (débordant strictement N) de T. On la dénomme $\mathrm{Coh}(T)$ et s’émerveille (c’est de fait une remarquable prouesse) qu’elle soit neutre (= indécidable, T ne prouve ni F ni $\rceil F$). Mais c’est justement parce qu’elle représente bien mal cette cohérence (cf. [0, p. 177]).

De même, on traduit la négation du (grand) théorême de Fermat par une formule G de $\mathcal{P}_0$ (axiomes arithmétiques de Peano, sans le schéma d’axiomes de récurrence – ou induction) dont la $\vdash$ formelle s’identifierait, par son expression dans N à la fausseté du théorème: on pourrait prouver cette fausseté supposée réelle par une $\vdash$ formelle dans $\mathcal{P}_0$. En effet G est close par $\exists \nu_0$ à ν_6, donc sa validation dans N l’entraîne dans tout $\mathcal{M}$ non standard puisque l’ensemble M de base contient N. Ce cas particulier ne vaut pas pour $\mathrm{coh}(T)$.

2. LES ILLOGISMES FONDAMENTAUX

(a) On pressent ce que la formalisation a de réducteur, et Gödel, nous écrit M. Guillaume, en était extrêmement conscient. Ce faisant on s’éloigne de l’immense richesse du domaine concret des mathématiciens, de leur modèle universel dit ci-dessus du type 3.: « Gödel n’a cessé d’insister sur la limitation des capacités d’expression et des capacités de démonstration à laquelle on se soumet lorsqu’on s’enferme dans un système formalisé, par rapport aux capacités indéfinies que l’on se permet dans une attaque purement intuitive. Le problème qui subsiste de la tentative de Hilbert est “qu’est-ce que je connais de N si j’accepte tels et tels axiomes et telles et telles règles de référence”, et “il n’y a pas de loi qui nous permette de maîtriser l’infini. Le problème du fondement des mathématiques est hors de portée des mathématiciens ou même de la philosophie des mathématiques, il relève de la philosophie de la connaissance générale.” »

Explicitons l'exemple trop simple que nous suggérions dans [0, p. 173] avec la formule

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Très maladroitement, nous l'écrivions

$$\exists n_1, \ldots, n_p \in [1, n] \Leftrightarrow \exists m_1 < m_2 < \cdots < m_p \in [1, n+p-1]. \tag{2}$$

Exprimée en français, nous voulions lire (2) ainsi: à chaque $\tilde{n} = \{n_1, \ldots, n_p\}$ correspond une $\tilde{m} = \{m_1 < \cdots < m_p \leq m = n+p-1\}$ et réciproquement. Mais ce langage n'est pas celui de la théorie arithmétique $\mathcal{P}_0$ ou $\mathcal{P}$ où (2) signifierait seulement l'existence d'une $\tilde{n}$ à gauche, et d'une $\tilde{m}$ à droite, mais non la correspondance biunivoque entre elles, qui, explicitée concrètement dit beaucoup plus que (2). La langue naturelle aussi bien mathématique dispose de beaucoup plus de liberté, de souplesse, pour changer de langage logique *au gré de ses besoins.* Cette logique, de la langue, dispose d'une grammaire très riche (dont une partie trop subtile a été abandonnée) qui correspond aux règles imposées définissant les formules du langage L, *mais aussi* de liens de dépendance variés entre des mots ou membres de phrases, et surtout *du sens des mots* eux-mêmes.

Démontrons maintenant notre lecture-preuve de (2). Elle se résume en un mot, "étaler": étaler chaque répétition δ_i fois des r valeurs $\nu_1, \ldots, \nu_r$ figurant dans $\tilde{n}$, en un segment σ_i de δ_i nombres consécutifs, commençant à $\nu_i + \delta_1 + \cdots + \delta_{i-1}$. On obtient ainsi une $\tilde{m}$ unique. On constate que l'application $\tilde{n} \Rightarrow \tilde{m}$ est biunivoque, ce que montre aussi la réciprocité $\tilde{n} \Rightarrow \tilde{m}$: les trous dans $\tilde{m}$ séparent les segments σ_i, définissant les δ_i puis les ν_i. Mais la langue exprime aussi cette biunivocité en disant « à chaque $\tilde{n}$ correspond une $\tilde{m}$ différente, et "réciproquement" exprime que l'image de $\{\tilde{n}\}$ recouvre $\{\tilde{m}\}$.

(b) Les tautologies, dans le modèle 1., définies p. 38 comme des formules propositionnelles universellement valides, contiennent au départ $\tau_{18}(A \vee \rceil A)$ qui, seule, signe une logique « non exclusive». $\tau_{21}(\rceil\rceil A = A)$ la complète, caractérisant à elle seule une logique binaire (sous-entendu stricte ou exclusive). Elle équivaut à la réunion de τ_{18} et de $\rceil(A \wedge \rceil A)$, absente dans [4, pp. 42–43], que nous avons notée τ_0 dans [0].

Dans [4], toutes les τ sont dites logiquement équivalentes, cas particulier des $A \approx B$ lorsqu'elles prennent la même valeur 1 ou 0 sur la « table de vérité» des δ, nommant ainsi, répétons-le, l'ensemble des 2^K systèmes de valeurs des K variables propositionnelles qui déterminent A et B, donc fixent les $\overline{\delta}(A)$ et $\overline{\delta}(B)$ associées. Nous récusons ce langage. Dans [0, p. 174], nous avons noté qu'il pouvait exister des liens syntaxiques entre les τ qui eux sont de vrais liens logiques tels $\tau_{21} \Leftrightarrow (\tau_0$ et $\tau_{18})$.

Ainsi nous rencontrons pour la première fois que la logique formalisée peut ne pas correspondre à la logique du sens du modèle 3., mais aussi, dans le type 1.

(c) Dans ce type 1., l'illogisme de [4] va être poussé beaucoup plus, et nous devrons annuler, rayer la plupart des tautologies ou équivalences tautologiques des pages 43–44, qui ne se réduisent pas à des banalités, parfois stupides par leur inutilité comme $\tau_{22} A \Rightarrow (A \vee B)$; on ne peut pas en ce cas accepter la définition « même idée sous plusieurs formes».

Dans [14, p. 88] on ajoute à l'entrée A de τ_{22}, sa négation $\rceil A$, pour déduire de $(A \vee B)$ que si $\rceil A$, alors B : $A \wedge \rceil A \overset{(*)}{\Rightarrow} B$. Ce faisant on oublie que si $\rceil A$, τ_{22} *ne s'exprime pas.* Aussi bien on « obtient» $(*)$ à partir de $\tau_{28} \rceil A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, oubliant de même que si $\rceil A$, $A \Rightarrow B$ ne s'exprime pas. On parle et on les admet, de « preuves par vacuité.» $(*)$ est connue des logiciens médiévaux (p. 88 susdite) sous le nom de EFQ: Ex Falso Quodlibert sequitur. Elle est admise d'emblée dans [4], dès la page 16 d'introduction du chapitre 1 et dans [9, p. 59]: $A \Rightarrow B$ est vraie dans trois cas sur quatre, avec de bien mauvais exemples pages 32 et 33, empruntés au modèle 3., à la division des entiers.

Ainsi on lie $A \overset{(i)}{\Rightarrow} B$ et $\rceil A \overset{(ii)}{\Rightarrow} B$, en exigeant une réponse binaire à l'ensemble de ces deux inférences et choissant « (i) est toujours vraie si $\rceil A$ (que B le soit ou non)», en sus de $A \wedge B$. Cette dissymétrie est choquante et absurde, mais elle est imposée par le refus de la trivalence de (i): si $\rceil A$, (i) ne s'exprime pas. Les informaticiens sont bien obligés de refuser ce point de vue, et [14] essaie sous le titre de « Introduction à la logique pertinente» de faire de même en identifiant (i) à $(\rceil A \vee B)$. Ce titre exprime avec élégance la fin de notre (b) ci-dessus.

(d) Toutes les τ de la p. 43, des numéros 19 à 37 (sauf τ_{21}) sont banales ou fausses, alors nous les dirons τ par défaut d'entrée, car elles se ramènent à nier τ_0. Ainsi de τ_{26} $(\rceil A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ à laquelle nous ne pouvons donner de sens: elle est elle-même vide et non dangereuse. De même avec τ_{30} $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ si on la limite à son entrée A vraie. La fausse lecture consiste, elle, à la dire fausse seulement si $A \Rightarrow \rceil (B \Rightarrow A)$, puis si $B \Rightarrow \rceil A$. Au sens strict τ_{30} suppose vraies les deux entrées A et B.

τ_{22} $(A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow A)$ n'est fausse (avec la fausse lecture) que si (A et $\rceil B$) n'implique pas $(C \Rightarrow A)$, donc implique C et $\rceil A$, il faut donc aligner $\rceil \tau_0$ et les deux mauvaises lectures des $\Rightarrow$.

τ_{25} $((A \Rightarrow B) \wedge \rceil B) \Rightarrow \rceil A$ est juste et équivaut à l'équivalence de contraposition τ_{17} $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$.

$\tau_{29}, \tau_{33}, \tau_{37}$ que nous n'écrivons pas, sont encore des τ par défaut.

La page 44 concerne des lignes d'équivalences multiples. Nous ne retiendrons qu'une partie de la première, numérotée 38. outre (en second) la répétition de τ_{17}, nous nous limitons à la première, susdite à la fin de (c)

$$(A \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} B) \Leftrightarrow (\rceil A \vee B).$$

Si on désire expliciter les vrais liens logiques, il faut ajouter $\tau_{21} = (A \Rightarrow \rceil A)$, et noter que

$$\tau_{21} \text{ et (i) } \Rightarrow (\rceil A \vee B) \text{ et } \tau_{21} \text{ et } (\rceil A \vee B) \Rightarrow \text{(i)}.$$

Ce faisant on ne prend en compte que $\bar{\delta}(A) = 1$ pour exprimer $\bar{\delta}$ (i): on ne dit rien si $\rceil A$, concernant B. S'il est sous-entendu que l'on est dans une logique binaire (stricte), on peut écrire

$$\tau_{38} \text{ (i)} \Leftrightarrow \rceil A \vee B.$$

Cela est notre "bonne lecture de τ_{38}", qui n'est celle de Cori et Lascar qu'une seule fois nous semble-t-il (p. 185), cf. ci-après en §5. dans un contexte qui exclut nécessairement la mauvaise lecture. En effet cette page 44, comme partout ailleurs dans le traité (sauf l'exception susdite) inclut $\rceil A$ dans la lecture de (i), c'est-à-dire $\bar{\delta}(A) = 0$, pour obtenir 1 dans les deux membres, excluant en fait toute réalité de B: elle n'a plus aucun vrai sens logique dans ce cas.

(e) Un transfert important des τ est opéré p. 180, sous le nom de tautologies du calcul des prédicats. Ce sont les F du domaine formel, qui, dans tout modèle du type 2. ou L-structure, sont universellement valides. Ce transfert *sous-tend* celui annoncé rapidement en §1.(a) avec la formule τ'_{28}.

En fait nous n'aurons à faire qu'aux tautologies τ_0, τ_{18}, et τ_{28}, dans le passage sans réflexion, le transfert postulé, des τ à toutes les théories formelles, alors notées τ' par nous, dans une théorie T.

L'exemple de $\tau_{28} A \Rightarrow (\rceil A \Rightarrow B)$ ((c) ci-dessus) est crucial puisque la définition générale de cette lecture n'est pas expressément donnée, ramenée à ce qui précède en ce (e): p. 234 on lit

$$\text{« } F \Rightarrow (\rceil F \Rightarrow G) \text{ (c'est une tautologie)».}$$

C'est le contexte qui assure que la notation F ou F est (vraie), comme on notait pour "A est vraie" dans (i), signifie $T \vdash F$: F est démontrée dans T, au sens de conséquence des axiomes de T, à l'aide des axiomes logiques qui comprennent toutes les τ. Et nous verrons que dans ce transfert: « nous avons choisi de mettre toutes les τ parmi les axiomes» (p. 254), le sort fait à τ_0, τ_{18}, et τ_{28} *relève en fait de trois modalités différentes.*

3. LE CAS DE τ_0

τ_0 est méconnue, elle gêne, car la transférer à toute théorie T ôterait tout un pan de la théorie de Gödel qui dit entre autres que « Si une T est cohérente (par définition p. 234, il n'existe pas de F telle que $T \vdash F$ et $T \vdash \rceil F$), elle ne démontre pas (formellement) cette cohérence». Cf. [0, §2.5].

Mais c'est tout simplement parce que $\rceil(F \wedge \rceil F)$ est une formule, mais non « pour toute F» (pour un nombre fini de F, oui). Et Alain Connes [3] le dit: « on ne peut pas formaliser de l'intérieur la cohérence d'un système logico-déductif». C'est donc une limitation *due à la méthode formelle elle-même.*

Cependant (et nous ne l'avions pas perçu dans [0] !) les tautologies échappent à cette limitation, τ_0' doit se lire $\forall F$, $\rceil(F \wedge \rceil F)$, exacte traduction de la définition sus-rappelée. Le $\forall F$ interdit pour une formule, fait au contraire partie de la définition des tautologies, comme

$$F \Rightarrow (\rceil F \Rightarrow G) \text{ pour } \tau_{28}'.$$

C'est donc une *incohérence* avec le principe de la lecture $\tau \rightarrow \tau'$, que de refuser τ_0'. Mais l'accepter, non seulement annule tout ce qui est lié au second théorème d'incomplétude de Gödel: la formule dite $\mathrm{Coh}(T)$ est neutre (donc viole τ_{28}', cf. §4.(b) ci-après), mais interdit le théorème équivalent à τ_{28}':

$$\tau_{28}'' F \text{ et } \rceil F \Rightarrow \text{ toute } G.$$

Or ce théorème a deux corollaires importants, le corollaire 1.7 (p. 236)

$$T \vdash F \text{ si et seulement si } (T \text{ et } F) \text{ est une théorie non cohérente,}$$

et le corollaire (un autre énoncé, p. 244) du théorème de complétude de Gödel (cf. §4.(c) ci-après).

4. LECTURES DE τ_{18} ET τ_{28}, LA TAUTOLOGIE MIRACLE τ_{28}''

(a) τ_{28}'' est acceptée d'emblée comme lecture de τ_{28} que nous récusons. C'est une formule miracle, à laquelle on tient, tant elle est utile, en particulier pour les deux corollaires susdits. Il n'est peut-être pas difficile de les contester de façon indépendante de celle qui précède: nous nous bornerons à une suggestion qui nous paraît sérieuse. Les axiomes d'une théorie T sont, par définition, des formules closes. Hors les tautologies nous nous demandions déjà comment les règles de déduction ([4, pp. 229–230]) peuvent aboutir à des F non closes. Mais une remarque analogue s'impose pour une G que T prouverait, lorsqu'elle contient des symboles de variables, fonctions ou relations qui ne figurent pas dans les A_i ni dans F. Comment une suite F_i (nécessairement finie) aboutissant à G peut-elle opérer *un saut de tels symboles* pour une F_i à partir de celles qui précèdent ? Même sans un tel saut nous doutons qu'une seule contradiction $F \wedge \rceil F$, dans T, puisse démontrer toute G: le transfert à T de $(*)$ ci-dessus en §2.(c), dite $EF\Omega$, ou de τ_{28}.

Il suffit d'un contre exemple. Ainsi en réduisant $\{A_i\}$ à $(F, \rceil F)$, ce qui pour nous est impensable mais rentre dans le contexte formel que se permettent aisément les logiciens. Alors la deuxième modalité de transfert annoncée à la fin du §2.(d) ci-dessus, consiste à admettre τ_{28} et τ'_{28}, τ''_{28}, sans examen, cela est conforme au postulat que constitue le principe de ce transfert.

Présentons maintenant un exemple de son utilité. Une première preuve du théorème de complétude de Gödel (: toute théorie cohérente admet un modèle), nécessite ([4, p. 241]) une preuve de la proposition B qui utilise de façon récurrente, à chaque pas de cette récurrence, deux fois le corollaire 1.7 susdit à la fin du §3. Une deuxième preuve l'utilise une fois, in fine, et *nous laisse interrogatif*. Prouvons ce corollaire, i.e. en fait: si $T' = T \cup \rceil F$ n'est pas cohérente, $T \vdash F$. Vu τ''_{28}, $T' \vdash F$. Alors le lemme de déduction [4, p. 236] assure $T \vdash (\rceil F \Rightarrow F)$, donc $T \vdash F$ (vu τ'_{26} !). C'est le miracle de cette preuve qui, comme dit p. 178 de [0], peut être rapproché de celle de $a = a$, dans $\mathcal{P}$, comptant 17 pas (dans Kleene [10]), comme de l'impraticabilité de preuves formelles complètes suivant [6] et [7].

(b) Reste la troisième modalité. τ_{18} est une vraie tautologie, mais τ'_{18} n'est pas admissible, car dans la lecture de [4] elle signifie $F \vee \rceil F$, c'est-à-dire l'absence de formule neutre, aisée à réfuter (il y a beaucoup plus simple que $\mathrm{Coh}(T)$). Alors que $A \vee \rceil A$ exprime (sans la disjonction) l'aspect binaire de la « logique propositionnelle», son transfert méconnaît qu'une F peut être non démontrable, mais aussi sa $\rceil$. Une théorie T ([4, p. 205]) est dite complète si, ayant un ou des modèles (i.e. consistante), toute F close est ou valide dans *tout* modèle – ce que l'on note $T \vdash {}^*F$ (nous préférons $T \vDash {}^*F$), ou sa négation telle (on ne dit pas F décidable car ce mot est réservé à la calculabilité sur machine). Ainsi on a un troisième traitement du principe de lecture des τ: ici il faut la lire $\vdash F$ ou $\vdash \rceil F$ ou F est neutre.

Cependant nous verrons que τ'_{18} est utilisée *une fois* pour la bonne lecture de τ_{38} (elle-même unique) dite en §2.(d) ci-dessus, c'est-à-dire la bonne lecture de $A \Rightarrow B$!

(c) Revenons maintenant à la deuxième application de la formule miracle τ''_{28}, annoncée à la fin du §3., la formule (5) de [0]:

$$T \vDash {}^*F \Rightarrow T \vdash F \text{ pour toute } F \text{ close.}$$

En effet si F n'était pas $\vdash$ dans T, le corollaire 1.7 « prouvé» ci-dessus en (a) assure que $T \cup \rceil F$ est cohérente, donc a un modèle (vu le théorème de complétude rappelé en (a)), dans lequel $\rceil F$ serait vraie, contredisant l'hypothèse $T \vDash {}^*F$. De ce sympathique énoncé qui après l'équivalence de « T consistante» (a un modèle) et « T cohérente», assure celle de $\models^*$ et $\vdash$, nous aimerions connaître une *vraie* preuve, tout en laissant une interrogation pour le théorème de complétude lui-même.

5. LE SENS DE $\rceil F$, NÉGATION FORMELLE POSTULÉE

Le problème du sens de $\rceil$, rencontré en §2.(b) ci-dessus pour les formules $A \overset{(i)}{\Rightarrow} B$, se pose dans le domaine formel. Or $\rceil F$ y est *postulé* bien avant qu'on introduise la $\vdash$ des F. Il est donc assez juste ([0, p. 174]) de dire que seul un modèle lui donne quelque sens. On impose des liens de cohérence entre $\rceil F$ et les satisfactions de F, $\rceil F$ dans un modèle. La définition de ces satisfactions tient deux pages, et, p. 185 un théorème en déduit des équivalences logiques dans un modèle, on n'est plus dans le type 1. La première est (1) $\rceil \forall \nu F \approx \exists \nu \rceil F$. On en déduit que pour toute fermeture $\bar{F}$ d'un F (il y en a 2^K si F a K variable libres), la négation de $\bar{F}$ revient à permuter $\exists \nu_k$ et $\forall \nu_k$. Suivent (2) $\forall \nu(F \wedge G) \approx \forall \nu F \wedge \forall \nu G$, et (3) $\exists \nu(F \vee G) \approx \exists \nu F \vee \exists \nu G$, mais on ne peut « distribuer» $\exists \nu(F \wedge G)$ et non plus $\forall \nu(F \vee G)$. Ensuite (4) concerne $H = (F \Rightarrow G)$ et est $\exists \nu H \approx (\forall \nu F \Rightarrow \exists \nu G)$. On note que l'entrée F de H est en quelque sorte inchangée: on la clôt $\forall \nu F$, et $\forall \nu$ concerne seulement G, comme dans la bonne lecture de $A \Rightarrow B$. Et la négation de $\exists \nu H$ dans un modèle, niera $\forall \nu G$. Ce qui nous intéresse est la preuve de (4): « (4) est une conséquence immédiate de (3) appliquée à $\rceil F$ et G.» C'est dire qu'on identifie H à $\rceil F \vee G$. C'est-à-dire aussi, comme annoncé en §4.(b) ci-dessus, que en *ce cas* Cori et Lascar acceptent, conformément à la fin du §2.(d), à la fois τ'_{18} et τ'_{38} *toutes deux niées partout ailleurs.*

6. L'ESPRIT DE LA LOGIQUE FORMELLE, SON PEU D'APPORT AUX MATHÉMATIQUES?

(a) Revenons si possible à une réflexion sur la volonté de formalisation qui est au départ de l'immense édifice de la logique mathématique. Le logicien est mû par la volonté de démontrer la non-contradiction *dans* une théorie formelle, théorie conçue comme une idéalisation de « l'axiomatique matérielle» qui, elle, ressort du domaine du mathématicien, avant « l'abstraction de l'état des choses et le façonnage existentiel» ([9, pp. 56–57]). Pourtant l'existence d'un modèle de T assure cette non-contradiction au sens de la cohérence ($\vdash F$ et $\vdash \rceil F$ est impossible, cf. le début de 3.). Et très justement, [4, p. 178], qualifie de « consistante *ou non contradictoire*» une T qui admet au moins un modèle. Ainsi ([5, p. 68]) $\mathbb{N}$ est un modèle de $\mathcal{P}$.

Mais on s'acharne à vouloir démontrer formellement la cohérence d'une T (contenant $\mathcal{P}_0$, par exemple $\mathcal{P}$) qu'on sait non contradictoire donc cohérente, *à partir de l'hypothèse de cohérence.* Et pour cela on « arithmétise» la propriété de cohérence (après l'ensemble des numéros des $F \in \mathcal{F}(L)$), ce qui est un peu artificiel, mais plus encore lorsqu'on représente la « formule arithmétique» obtenue, par $\mathrm{Coh}(T)$, sans guère de signification hors de $\mathbb{N}$. M. Guillaume nous apprend cependant que, dans un modèle où $M > N$, $\mathrm{Coh}(T)$ induit une fonction qui prolonge la précédente, ce qui n'implique pas que la formule soit vraie dans ce M.

Notons ici que le « premier» théorème d'incomplétude de Gödel concerne toutes les formules closes *du langage* L de T, soit de $\mathcal{F}(L)$ susdite. On suppose seulement que l'ensemble des numéros *des axiomes de* T est récursif. Pourquoi une telle F serait-elle (ou sa négation) universellement valide ? L'existence de F neutres paraît naturelle puisque une telle F – ici close – n'a aucune raison d'être liée à T. [5, p. 89] envisage T vide, alors il n'y a de théorèmes de T que les axiomes logiques, dont les tautologies. Ainsi l'énoncé de ce premier théorème est troublant par son peu de sens. Il montre seulement la nécessité de rejeter τ'_{18}. Page 89 les auteurs notent seulement que F peut être « sans signification». Cependant le théorème dit aussi que même en mettant dans T tous les théorèmes, supposés cohérents entre eux, il y a *encore* des F neutres. Dans [0, p. 9, 4.2] nous renvoyons à [12] et [13] pour l'équivalence de l'axiome du choix et du lemme de Zorn. La construction, difficile, d'une F non arbitraire, ici $\mathrm{Coh}(T)$ ajoute donc beaucoup au théorème, elle lie à T cette formule, et lui donne un sens dans $\mathbb{N}$, avec la limite dite ci-dessus dans $M > N$.

Notons *donc* à nouveau que le principe du transfert des τ à toutes les F d'une T est doublement injustifié

(i) parce que la validité d'une F dans un modèle, nécessairement du type 2., n'a pas la même automaticité qu'une formule propositionnelle A du modèle 1., $\bar{\delta}(A)$, bien qu'on la sache vraie ou fausse. Il y a toute la complexité du langage L entre les deux: la grammaire de L autorise, définit l'appartenance de F à $\mathcal{F}(L)$, et

(ii) la lecture $\tau \to \tau'$, de τ même strictement et correctement binaire, privilégie le lien formel de F avec les axiomes de T, alors que τ' a une lecture « tertiaire», ajoutant ($\vDash F$ et $\vDash \rceil F$) qui devient licite.

Nous rejetons τ'_{18} mais recevons τ'_0 avec la même convention implicite du transfert que dans [4] (exemple de τ'_{28} en §1.(a)), lorsque les auteurs la nient pour disposer de τ'_{28} miracle.

En fait, il faut imposer à T, c'est-à-dire à ses axiomes, une contrainte minimale, soit la consistance, soit la cohérence. La première contient la deuxième. Sinon ne s'expose-t-on pas à de gros risques ? Que ferait-on sans $\tau'_{28} \approx \tau''_{28}$ du §3. ci-dessus ?

(b) Dans son projet initial Hilbert visait aussi ([9, p. 9]) une certaine automatisation en mathématiques, qui a abouti avec les machines de Turing ([5, p. 47]) à la « décidabilité par un moyen mécanique» identifiée au caractère récursif de l'ensemble $\mathrm{Th}(T)$ des numéros (après arithmétisation des théorèmes de T ([5, p. 89]).

Mais nous devons renvoyer au remarquable texte [1] (en fait la méthode axiomatique): « Mais jamais Hilbert, un modèle ou presque un père pour Bourbaki, ne tombe dans le travers de certains disciples ... Il a la passion du problème spécial, précis et concret, c'est pour résoudre de tels problèmes qu'il a forgé des outils dont l'importance n'a pas diminué.»

Nous avons du mal à penser que la « théorie des nombres réels» a un fondement incertain qui n'est assuré que par la théorie de Zermolo-Fraenkel (cf. [0, pp. 179 à 181]). Postuler l'existence d'un modèle dit « l'univers $\mathcal{U}$» est pour J. Paul Cohen un axiome « vrai si on croit aux ensembles». Nous l'admettons assez aisément, mais encore plus *le principe* de l'axiome du choix, c.à.d. de l'existence *et non* du choix, qui nous paraît (cf. [2, p. 97])

(i) rentrer dans une démarche de pensée très généralement utilisée,

(ii) ne pas pouvoir receler de contradiction, surtout lorsqu'il s'agit, comme pour le paradoxe de la sphère (Hausdorff 1914 et variante [11] de Paul Lévy 1960) de partager un ensemble très concret (la sphère de $\mathbf{R}^3$ ou l'ensemble de Cantor $K \subset [0,1]$ de [2, p. 93]) en classes *dénombrables.*

Hausdorff comme Paul Lévy obtiennent un résultat remarquable qui se passe de toute exigence constructiviste d'un procédé de choix d'un point dans chaque classe d'équivalence (relation $\mathcal{R}$) pour définir l'ensemble considéré.

Alain Connes utilise le théorème ergodique pour assurer que si φ appliquant $X = K/\mathcal{R}$ dans $[0,1]$ *n'est construite qu'en* utilisant l'axiome du choix dénombrable, l'application $\varphi \circ p$ (p est la projection de K dans X) de K dans $[0,1]$, est presque partout constante, donc que φ ne peut être une « injection» de X dans $[0,1]$. Cela prouve dit-il que la cardinalité *effective* de X est strictement plus grande que celle du continu. N'est-ce pas justifier a contrario beaucoup plus que notre point de vue ?

Enfin M. Guillaume nous confirme (comme nous le proposions en [0, p. 182]) que toute affirmation concernant la cardinalité dans ZF est nécessairement *restreinte à un univers* $\mathcal{U}$.

L'hypothèse simple du continu demeure donc, et nous doutons même qu'elle puisse jamais être prouvée. Elle concerne le continu "plein et entier" – non mutilé ou sophistiqué – des mathématiciens.

Nous remercions très chaleureusement M. Marcel Guillaume qui a pris beaucoup de temps, par ses lettres, pour nous instruire et nous corriger, lettres dont nous n'avons pas encore tiré tout le fruit, encore moins celui de son immense travail de traduction [9].

COMPLÉMENT. LEMME DE DÉDUCTION ET NOTION D'INFÉRENCE EN LOGIQUE FORMELLE

Ce complément se réfère au texte qui précède, que nous désignons $[\widetilde{0}]$. Un réexamen de la notion d'inférence montre que le lemme de déduction se contredit dans son utilisation dans [4] pour prouver le corollaire 1.7 énoncé au §3 de $[\widetilde{0}]$, mais on ne voit pas comment faire sans lui, bien que sa preuve (p. 236 de [4]) soit fausse. Notre lecture de $F \Rightarrow G$ interdit le transfert $\tau \to \tau'$ étudié dans $[\widetilde{0}]$.

I. Le lemme de déduction de Cori et Lascar [4, ch. IV 1.7] est-il autocontradictoire?

1. Le corollaire 1.7 (cf. les §3 et 4.(a) de $[\widetilde{0}]$) du lemme n'est pas prouvé: sa preuve (p. 237) ne fait pas intervenir τ''_{28} ou τ'_{26}, seulement l'hypothèse que $T' = (T \cup \rceil F)$ démontre F (que T' a cette incohérence là), et nous **ajouterons** l'hypothèse $T \nvdash \rceil F$, cf. ci-après, concluant alors $T \vdash (\rceil F \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} F)$ vu le lemme.

Comme la conclusion (i) du lemme ne s'exprime pas, on ne peut utiliser τ'_{26} pour prouver que $T \vdash F$, c.à.d. prouver le corollaire. Il suffirait au lieu de τ'_{26} d'utiliser $\tau'_{18} : T \vdash (F \vee \rceil F)$ sans **aucun** besoin du lemme mais on sait que τ'_{18} est irrecevable.

Rendons ici justice à Cori et Lascar: leur lecture de $(\tau \to \tau')$ [cf. §2.(e) et §6.(a) (ii) de $[\widetilde{0}]$] traduit A (au sens de A est vraie, $\overline{\delta}(A) = 1$) par $\vdash F$, donc $\big(A \overset{\tau}{\Rightarrow} B\big)$ par $T \vdash F \Rightarrow T \vdash G$, évitant ainsi toute mauvaise lecture de l'inférence τ, par exemple celle de $A \overset{\tau_{30}}{\Rightarrow} (B \Rightarrow A)$ utilisée dans la preuve du lemme.

Cela est important. Notons que l'acceptation du transfert $\tau \to \tau'$ **dans le cas** où A de τ ne s'exprime pas ne doit pas donner lieu (si on l'admet) à une entrée, telle $(\rceil F \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} F)$, qui puisse être vraie, s'exprimer dans T (si pour (i) on exclut τ'_{18}) pour utiliser τ'_{26}. Il vaut mieux éviter cette acceptation, comme nous l'avons fait ci-dessus. D'ailleurs si τ est une banalité, τ' le sera souvent également, **sans besoin** de se référer à τ.

Cette condition d'entrée non vide n'est pas réalisée dans le cas de τ''_{28}: on transforme τ_{28} en $(A \text{ et } \rceil A) \Rightarrow B$ d'entrée vide et la lit $(F \text{ et } \rceil F) \overset{\tau''_{28}}{\Rightarrow}$ toute G, en supposant que $(F \text{ et } \rceil F)$ exprîme une − vraie − incohérence de T. Pour cela on exclut τ'_0 comme on a exclu τ'_{18}! Nous préférons rayer les τ à entrée vide et les τ' telles.

2. Revenons à notre problème: il peut paraitre curieux, que dans les conditions susdites, le lemme puisse affirmer une sortie (i) qui soit vide, qui **ne s'exprime jamais vraie**, et nous étions tentés d'en conclure trop simplement

que τ''_{28} était en cause, l'hypothèse de [4] dans l'énoncé du corollaire étant "T' non cohérente" $\overset{\tau''_{28}}{\Rightarrow} T \vdash F$. Nous l'èvitons dans l'énoncé susdit du corollaire, et sommes amenés à nous pencher sur la $\vdash$ du lemme.

Mais l'énoncé du lemme fait **de même** (avec la même correction $T \nvdash F$ que ci-dessus): Il dit que si $T' = (T \cup F) \vdash G$, alors $T \vdash (F \Rightarrow G)$. Cependant ce lemme n'a intérêt que si $T \nvdash F$. Sinon il est trivial car si $T \vdash F$, en remplaçant dans la chaîne de G_i qui aboutit à G, la prouve **dans** T', F axiome de T' par F prouvée dans T – chaque fois que F apparait, on obtient $T \vdash G$.

Revenant à $T \nvdash F$, du début, ainsi justifiée, la conclusion (i) du lemme est vide (F a remplacé $\rceil F$ dans la définition de T').

Cela devrait suffire à infirmer le lemme: il est autocontradictoire dans son énoncé. Pour plus de sûreté (abandonnant ce problème d'une conclusion qui ne s'exprime **jamais** aux logiciens), nous exposons la "preuve" du lemme p. 236:

L'entrée du lemme suppose une suite

$$G_0 \Rightarrow G_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow G_n = G \textbf{ dans } T'.$$

On veut justifier les passages pas à pas de $F \overset{T}{\Rightarrow} G_{i-1}$ à $F \overset{T}{\Rightarrow} G_i$, et les auteurs disent pouvoir le faire par insertions successives de tautologies. Le cas le plus général envisagé (entre autres) est celui où il existe

$$(*) \qquad (G_k \text{ et } G_j) \overset{T'}{\Rightarrow} G_i, \quad k < j < i,$$

et ils invoquent la tautologie

$$(**) \qquad \left(F \overset{T}{\Rightarrow} G_j\right) \Rightarrow \{(F \Rightarrow (G_j \Rightarrow G_i)) \Rightarrow (F \Rightarrow G_i)\}.$$

$(**)$ en serait (une τ'), triviale, si $(G_j \Rightarrow G_i)$ **valait dans** T. Mais dans toutes ces deux pages (le haut de 237 pour le corollaire) jamais T et T' ne sont mentionnées dans les formules, la notation T' de $T \cup F$ n'est même pas posée. On invoque ensuite "$F \Rightarrow (G_j \Rightarrow G_i)$ est égale à $F \Rightarrow G_k$" (disons $\{F$ et $(F \Rightarrow G_k)$ et $G_j\} \Rightarrow G_i$, d'où $F \Rightarrow G_i$). Mais à nouveau il faudrait que $(*)$ **vaille dans** T.

Ainsi alors que l'enoncé du lemme ne nous choquait pas, avec ces τ' banales la preuve camoufle la réalité. Nous sommes effrayés d'exposer nos doutes en constatant de telles négligences, craignant de nous égarer nous même. □

II. La notion d'inférence en logique formelle

1. La notion de négation, le sens du signe $\rceil$, dans le domaine formel, ne sont pas définis, sont seulement postulés comme signe permis avec $\vee$ et $\wedge$ ou $\Rightarrow$, dans la construction des formules. Cela pose un sérieux problème lorsqu'une théorie T admet une contradiction $F \wedge \rceil F$: elle n'a pas de modèle pour interpréter concrétement une quelconque formule. Un modèle réalise

l'"axiomatisation matérielle" du modèle universel (∗∗) des mathématiciens, précédant le "façonnage existentiel" qui, avec le domaine de base **d'un** modèle de T (domaine plus ou moins abstrait, virtuel) "s'abstrait de l'état des choses" et concerne les F (cf. [$\widetilde{0}$], §6.(a)).

Nous avons vu dans [$\widetilde{0}$] l'importance de ce fait lorsqu'on veut justifier la vérité des tautologies (dans une théorie T) par transfert automatique de fausses tautologies τ dans **une** logique binaire stricte, la plus simple des logiques qui soit, par ses fondements.

2. De même la notion d'inférence (= déduction) est transférée automatiquement sans étude aucune. Nous y reviendrons après l'avoir circomvenue **d'abord** dans le domaine formel, c.à.d. dans un langage L avec des règles de formation de toutes les formules: $F \in \mathcal{F}(L)$, et le choix de certaines de ces formules comme axiomes de la théorie T qui en résulte. Des règles très simples à certains égards, de déduction, dèfinissent alors l'ensemble $(\mathrm{Th}\, T)$ des formules que T démontre $(T \vdash)$. T est sous entendue, lorsqu'on reste dans une seule T, en écrivant $\vdash F$:

$$F \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} G \text{ est lue } \vdash F \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} \vdash G.$$

Et (i) ne s'exprime que **ssi** $T \vdash F$ et $T \vdash G$, comme $A \Rightarrow B$, dans sa "bonne lecture", sans interférer avec le cas d'une entrée $\rceil A$ ou $\rceil F$.

(i) Par définition $\vdash F$ signifie qu'il existe une suite

$$F_0 \Rightarrow \cdots F_{i-1} \Rightarrow F_i \Rightarrow \cdots \Rightarrow F_I = F, \tag{1}$$

telle que au départ F_i soit un axiome de T (on peut préciser $T = T_E$, E ensemble de ces axiomes, sous entendu dans L) ou un axiome logique, une τ' par exemple. On suppose que chaque F_i se déduit de au plus deux F_k, F_ℓ antérieures de cette suite, i.e. $k < \ell < i$ et $\vdash F_\ell$ et $\vdash F_k \Rightarrow\vdash F_i$.

(ii) Soit une autre G que T démontre:

$$G_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow G_j \Rightarrow G_j = G. \tag{2}$$

Ayant (1) nous pouvons après F placer successivement les $F \wedge G_j$, car ayant placé $F \wedge G_k$ et $F \wedge G_\ell$, $(G_k$ et $G_\ell) \Rightarrow G_j$ signifie $(\vdash G_k$ et $\vdash G_\ell) \Rightarrow\vdash G_j$, alors $(\vdash F$ et $\vdash F_k$ et $\vdash F_\ell) \Rightarrow (\vdash F$ et $\vdash G_j)$.

Ainsi $\vdash F$ et $\vdash G$ implique qu'il existe une "suite causale" directe qui va de F à G, une autre de G à F.

3. Mais ce qui est extraordinaire, du moins nous surprend beaucoup, est que (i) vaut pour tout couple $F \times G$ tel que $T \vdash F$ et $T \vdash G$, donc (i) équivaut à $F \Leftrightarrow G$, car réciproqement si une suite (2) incorpore F déja démontrée, remplaçant F par (1) on obtient une preuve $(2')$ qui ne doit rien à F.

Cela n'est **absolument pas le cas** pour un modèle de type 1., où les formules (dites propositionnelles) sont construites à partir de K variables propositionnelles valant 1 ou 0 (K peut varier, et le nombre de telles variables être illimité, mais fini pour chaque A), et par définition δ dêcrit l'ensemble $\{1,0\}^K = E$ dit table de vérité de A comme de tout ensemble de A qui fait intervenir seulement tout ou partie de ces K variables.

On note $\overline{\delta}\,(A) = 1$ ou 0 la "valeur" de A qui découle des valeurs des variables propositionnelles du modèle, soit, par définition, de $\delta \in E$. Alors $A \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} B$ a un sens causal caché qui se traduit par (i) est vraie si chaque fois que $\delta \in E = \left\{\delta : \overline{\delta}\,(A) = 1\right\}$, alors $\overline{\delta}\,(B) = 1$, soit $E_B^{\text{(ii)}} \supset E_A$.

Il est essentiel de noter que c'est (i) qui, pas à pas, définit le sens de $\Rightarrow$ dans la construction de A à partir des variables A_k. Rappelons notre choix que pour $\rceil A$ et B, (i) signifie $\overline{\delta}\,(A) = 0 \Rightarrow \overline{\delta}\,(B) = 1$. Cori et Lascar [4] définissent "A et B logiquement équivalente" par $E_A = E_B$: les deux "variables aléatoires" (définies sur l'espace E) $\overline{\delta}\,(A)$ et $\overline{\delta}\,(B)$ sont égales. Les τ ont toutes un E_τ égal à E, quel que soit τ et les variables de base concernées. On peut dire aussi que ce modèle (dit par nous de type 1.) est réducteur par rapport à d'autres logiques binaires possibles.

4. Le lemme de déduction, complété dans son énoncé comme en I, ne s'exprimait pas, avons nous vu. Cela ne fait pas intervenir 3. qui précède, seulement l'exigence que les entrées A ou F de l'inférence (i) s'expriment. Notre traduction par "autocontradictoire" est peut être mauvaise. Mais dans sa forme initiale, celle de [4, p. 236], le lemme qui (pour F close) affirme $T' = (T \cup F) \vdash G \Rightarrow T \vdash \left(F \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} G\right)$, s'exprime vrai, suivant 2., ci-dessus, **ssi** $T \vdash (F \text{ et } G)$, alors $(\mathrm{Th}\,T') = (\mathrm{Th}\,T)$ et **le lemme n'apporte rien**: si $T \vdash F$, les G qu'il démontre sont les mêmes que celles que T démontre.

Les auteurs l'appliquent de suite au couple $(\rceil F, F)$ au lieu de $(F \Rightarrow G)$ pour obtenir $T \vdash (\rceil F \Rightarrow F)$, donc affirmer (avec notre lecture de (i)) T incohérente, alors que le lemme n'a pas de sens, dans leur optique qui **utilise** τ''_{28} pour assurer l'entrée $T' \vdash F$ du lemme, que si T est cohérente. C'est bien **le lemme qui se contredit dans cet exemple**. Avec l'hypothèse normale que (pour le couple F, G) $T \nvdash F$, nous avons noté en I.2 que la sortie du lemme $F \overset{T}{\Rightarrow} G$, ne s'exprimait pas, car nous n'utilisions que l'entrée de cette sortie et non son expression complète. Alors (revenant à $\rceil F, F$) $(\rceil F \Rightarrow F) \overset{\tau'_{26}}{\Rightarrow} F$ est ou irrecevable si T est cohérente ou $T \nvdash F$, ou d'une affligente banalité: $(F \text{ et } \vdash F) \overset{T}{\Rightarrow} F$.

On notera que si on refuse, nie que $T' = (T \cup \rceil F) \vdash F$, quoique supposée incohérente (hypothèse qui est l'entrée du corollaire, mais que, pour nous rien n'impose), soit si on suppose que $T' \nvdash F$, il n'y a plus de preuve de corollaire.

En fait c'est la seule hypothèse $(T \cup \rceil F) \vdash F$ dite en I.1 qui peut engager, **via le lemme et fausssement**, un essai de preuve de ce corollaire.

5. Dans le langage susdit de l'équivalence de toutes let τ, on pourrait dire toutes les $F \in (\mathrm{Th}\, T)$ équivalentes parce que résultant du même ensemble d'axiomes. Notons alors $T = T_E$, si c'est dans le même langage L. E, comme en 3., est au soubassement d'une certaine casualité. On peut ici passer au modèle 3. dans lequel Cori et Lascar [4, p. 33] offrent une question et un exemple pertinents, très éclairants sur ce problème: le théorème de Rolle implique-t-il le théorème de Pythagore? Notons qu'on est là dans l'optique ambigüe présentée en 1.: il y a "axiomatisation matérielle" et pas de formalisation. Mais nous devons nous placer dans ce cadre T_E de déductions à partir d'un système E d'axiomes, pour éclairer une logique causale. Il faudrait en fait attacher un théorème F de T à la partie minimale de E qui intervient dans la $\vdash$.

Nous citons en §2.(a) de $[\widetilde{0}]$, Gödel exprimant les capacités indéfinies de l'attaque **purement intuitive** des mathématiciens, langage que nous remplaçons en ce §2.(a) par "le changement de logique par le mathématicien, au gré de ses besoins".

Cela signifie par exemple (L_1 et E_1) pour Rolle et (L_2, E_2) pour Pythagore, et le mathématicien est à juste titre passionné (dans des cas moins artificiels) par des passages de T_1 à T_2 lorsqu'ils donnent une preuve indépendante de leur commune vérité.

Parfois et plus souvent, c'est l'introduction à l'intérieur d'une T de quelques notions nouvelles de structures carrefour (cf. [10]) qui offrent des "économies d'intelligence" simplifiant notablement une preuve initiale.

6. La différence énorme entre les notions (i) d'inférence dans le modèle de type 1. et dans le domaine formel, fournit donc un autre motif, bien plus impératif et précis que celui que nous invoquons dans $[\widetilde{0}]$ au §6.(a) (ii), pour refuser globalement le principe du transfert $\tau \to \tau'$.

Dans notre modèle de type 3. ($[\widetilde{0}]$ et 1. ci-dessus), **celui de la langue courante**, l'entrée de l'inférence $A \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} B$ a un sens conditionnel: si A est vrai, alors B l'est. C'est dire que l'aléa du modèle de type 1., explicité en 3. ci-dessus, devient (sans modalité probabiliste comme alors) celui de la vie, où il est assez **vain** de parler de logique sans définir et restreindre **avec toutes les limites possibles**, un cadre à un modèle ou exemple de ce type 3. Mais n'y a plus aucun aléa dans le domaine mathématique, axiomatisé, **ou** dans le domaine formel.

Notre conclusion concernant le transfert des τ sera: lorsqu'on refuse les fausses τ **et** les τ' qui seraient ainsi "justifiées", telles τ'_{28} et τ''_{28}, chaque tautologie, le plus souvent (ou toujours?) banale, a une justification propre au domaine considéré qui n'a pas à être rapportée à un autre domaine.

Revenons alors aux modèles du type 2., c.à.d. aux ensembles de base M de ces modèles. Si $T \vdash F$ et G, le sens de $F \overset{(\mathrm{i})}{\Rightarrow} G$ dans tout M est celui qui vient d'être dit pour le type 3. mathématique ou le domaine formel. Si F est neutre et close, la valeur $\overline{\delta}\,(F)$ dans M, pour F close, dépend de M pour toutes les variables v: ces variables sont "attribuées" à M par $\exists v$ ou $\forall v$. Alors $\overline{\delta}\,(F)$ **dans un** M relève d'une logique binaire qui accepte $F \vee \rceil F$ comme tautologie donc aussi $(\rceil F \vee G) \overset{\tau_{38}}{\Rightarrow} (F \Rightarrow G)$ comme tautologie non formelle: **nous ne l'écrivons pas** τ'_{38}. On retrouve pour (i) un aléa (de l'entrée) **sans aucun rapport** avec celui du type 1., à savoir M lui-même, sans guère pouvoir donner un sens global à (i) dans la méconaissance où l'on est de tous les M (relevant des axiomes de T), comme des valeurs $\overline{\delta}_F\,(M)$ et $\overline{\delta}_G\,(M)$ éventuellement. Un exemple de ce qui précède concerne $\tau_{17}\,(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$, vraie démonstration par l'absurde (et non le corollaire 1.7, cf. [4, p. 236]) pour le type 3., mathématique. τ_{17} vaut dans les modèles de type 1. (avec aléa) comme dans T pour les F non neutres (notant $\widetilde{\tau}'_{17}$ cette réduction), **et** les modèles de T, que F soit neutre ou non.

Notons enfin que dans les formules de calcul des prédicats de la page 185 de [4], il est justifié de ramener $F \Rightarrow G$ à $\rceil F \vee G$, sans opposer aux auteurs $\tau'_{18} F \vee \rceil F$ comme nous l'avons fait au §5 de $[\widetilde{0}]$, **à condition** que soit remarqué (ce que nous n'avions pas perçu **et n**'était-pas dit) qu'il s'agissait de τ_{18} non formelle et non de τ'_{18}. Il faut noter que dans le domaine formel c'est $\left(F \overset{(\mathrm{i})}{\Rightarrow} G\right) \Leftrightarrow (\nvdash F \vee \vdash G)$ qui est la bonne lecture formelle de $\rceil F \vee G$ de τ_{38}, mais $\nvdash F$ sort du langage associé à L, et réunit F neutre et $\vdash \rceil F$ cela est conforme à la fin du §4.(b) de $[\tilde{0}]$.

7. Nous avons noté au §4.(c) de $[\widetilde{0}]$ que le corollaire: pour toute F close

$$(***) \qquad T \vDash {}^{*}F \Rightarrow T \vdash F,$$

du théorème de complétude de Gödel, repose directement sur le corollaire 1.7 (I.1 et fin de 4. ci-dessus) non prouvé, sans le mettre en doute. Corrigeons la fin du §4.(a) de $[\tilde{0}]$: Le théorème de Gödel admet une 3$^{\mathrm{e}}$ preuve, due à Herbrand, non aisée et bien jolie ([4, pp. 245–253]). Notre doute concernant le corollaire $(***)$ demeure, suivant la fin de 4. ci-dessus.

REFERENCES

[0] A. Tortrat, *Logique formelle et mathématiques.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **49** (2004), 173–182.
[1] Gustave Choquet, *L'Analyse et Bourbaki.* Enseignement Math. (2) **8** (1962), 109–135.
[2] Alain Connes, *Géométrie non commutative.* Interéditionss, Paris, 1990.
[3] Alain Connes, *Triangle de pensées.* Ed. Odile Jacob, Paris, 2000.

[4,5] René Cori et Daniel Lascar, *Logique Mathématique*, Tomes I et II. Ed. Masson, Paris, 1994.

[6] Jean-Paul Delahaye, *Information, complexité et hasard.* Hermès, Paris, 1994.

[7] Jean-Paul Delahaye, *Les proposions indécidables.* Pour la Science, no. 265, nov. 1999. *Promenade au pays des indécidables.* Ibid., no. 266, déc. 1999.
Raccurcis dans les démonstrations. Ibid., no. 268, fév. 2000 (p. 96, colonne 3).

[8] J.Y. Girard, E. Nagel, J.A. Newman and K. Gödel, *Le théorème de Gödel.* Points-science, Seuil, Paris, 1997.

[9] D. Hilbert et P. Bernays, *Fondements des mathématiques*, traduction de l'édition allemande de 1968 (Tome I, 607 pages) par François Gaillard et Marcel Guillaume. L'Harmattan, 2001.

[10] Stephen C. Kleene, *Logique Mathématique,* 2e traduction française. Ed. Jacques Gabay, Paris, 1987.

[11] Paul Lévy, *Le paradoxe de la sphère et les fissions en chaîne.* Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. **3–4** (1960/61), 135–144.

[12] H. Loomis, *Abstract Harmonic Analysis.* Van Nostrand, New York, 1993.

[13] J. Riss, *Les théorèmes de Zorn et de Zermelo.* Publ. Sci. Univ. Alger **3** (1956), *2,* 121–124.

[14] François Rivenc, *Introduction à la logique pertinente.* PUF, Paris, 2005.

Reçu les 25 mai et 28 août 2007

85, Rue de Paris
92190 Meudon, France