ÉQUATIONS D'ÉTAT BIEN POSÉES EN CONTRÔLE BILINÉAIRE

(WELL-POSED STATE EQUATIONS IN BILINEAR CONTROL)

JEAN-MARC CLÉRIN

Nous considérons une classe de systèmes non linéaires : les équations d'état de problèmes de contrôles dont le type est bilinéaire. Dans une telle équation, un opérateur est bilinéaire relativement au contrôle u et à l'état z. Nous portons plus particulièrement notre attention sur les opérateurs bilinéaires de la forme $u \cdot v$. Le contrôle est donné et nous établissons que, sous des hypothèses adéquates, ces problèmes sont bien posés.

We consider a class of nonlinear systems: the state equations of bilinear control problems. In such an equation, an operator is bilinear in the control u and in the state z. We focus on the bilinear operators of the form $u \cdot v$. The control is given and we prove, under suitable assumptions, that such problems are well-posed.

AMS 2010 Subject Classification: 34G20, 35B45, 49J20.

Key words: nonlinear infinite system, bilinear control, a priori estimates.

1. INTRODUCTION

Nous étudions des équations différentielles qui modélisent une large classe de problèmes d'évolutions. Ce sont des équations d'état qui gouvernent des problèmes de contrôle de type bilinéaire.

L'inconnue est l'*état* que l'on note z ; distribué sur une partie bornée de l'espace, il évolue durant l'intervalle de temps $[0,T]$. Il y a trois paramètres : l'*état initial* z^0, le *contrôle* u et la *perturbation* f. Notons

$$(E_{z^0,u,f}) \qquad \begin{cases} \dot{z}(t) + A(t,z(t)) = B(t,u(t),z(t)) + f(t) \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ z(0) = z^0 \end{cases}$$

une telle équation. En toute généralité, l'opérateur A est non linéaire et l'opérateur B est bilinéaire relativement au contrôle et à l'état. Plus particulièrement, dans cet article, nous nous attachons à étudier la classe des équations d'état pour lesquelles l'opérateur bilinéaire est du type $B(u,v) = u \cdot v$. (Le cas des opérateurs bilinéaires du type $B(u,v) = (u \cdot \nabla)v$ est abordé dans [8].)

REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL., **56** (2011), *2*, 115–136

Les progrès de la recherche dans des champs aussi variés que la mécanique, la physique, la biologie et l'économie ont stimulé l'étude des modèles non linéaires. Nous portons notre attention sur la classe des systèmes de dimension infinie de type parabolique et bilinéaire en suivant la terminologie introduite par C. Bruni, G. Di Pillo et G. Koch dans [7] : la bilinéarité est relative à l'état et au contrôle (voir des exemples chez [12], [5] et [1]). Les modèles mathématiques qui nous intéressent sont des équations aux dérivées partielles (EDP). Mais au lieu de travailler directement sur ces EDP d'évolution, le choix d'un triplet de Gelfand (cf. [11]) adapté aux ordres de dérivation et aux contraintes de bord permet de se ramener à une équation différentielle dont l'inconnue ne dépend plus que du temps. Par contre les solutions éventuelles de $(E_{z^0,u,f})$ sont à valeurs dans un espace fonctionnel. (Ces solutions sont habituellement appelées les *solutions faibles* de l'EDP correspondante.)

Dans cet article, le résultat principal que nous établissons peut s'énoncer de la façon suivante (cf. Théorème 5.1) :

L'équation d'état $(E_{z^0,u,f})$ est un problème bien posé au sens de Hadamard. Autrement dit, $(E_{z^0,u,f})$ admet une solution notée $z_{z^0,u,f}$, cette solution est unique et dépend continûment des paramètres z^0, u et f.

Bien entendu, la formulation précise de ce résultat nécessite d'introduire au préalable le concept même de solution, des hypothèses spécifiques appropriées et des notations diverses. A notre connaissance, le résultat d'existence et d'unicité que nous établissons n'est pas un cas particulier de résultats classiques. Par exemple, en comparant avec un théorème général de J.-L. Lions (Théorème 1.2., Chapitre 2, page 162, [13]), on constate que la somme $A(\cdot,z) - B(\cdot,u,z)$ peut être considérée comme une seule partie non linéaire en z. Cependant, les hypothèses qui sont adaptées à nos exemples et que nous détaillons ci-dessous ne permettent pas de vérifier celles du théorème de J.-L. Lions. Dans les démonstrations, chacune des parties *non linéaire* et *bilinéaire* sera estimée séparément. (Nous préciserons ce point dans la remarque 2 qui suit l'énoncé du Théorème 5.1.) Il est à noter que nous établissons la régularité des états relativement aux paramètres à l'aide du lemme de Willett et Wong (voir [14] et [9]) qui s'avère un meilleur outil que le lemme de Gronwall-Bellman dans notre cas bilinéaire.

2. CADRE FONCTIONNEL

2.1. Solutions faibles

Les modèles mathématiques dont sont issues les équations d'état $(E_{z^0,u,f})$ sont des équations aux dérivées partielles (EDP). La variable de temps appartient au segment $]0,T[$ où T est un nombre réel positif. La variable d'espace appartient quant à elle à un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ (n est un entier naturel non nul) qui est localement d'un seul côté de sa frontière. Dans la suite nous noterons Ω ce domaine et $\partial\Omega$ sa frontière. Soit l'état du système z et les trois paramètres que sont l'état initial z^0, le contrôle u la perturbation f, ces EDP ont la forme ci-dessous.

$$(EDP_{z^0,u,f})\quad \begin{cases} z_t(t,x) + \mathbb{A}z(t,x) = \mathbb{B}(t,u(t),z(t)) + f(t,x) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z(t,x) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0,x) = z^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le contrôle u agit de façon multiplicative sur l'état z qui est l'inconnue. Ici, il y a trois paramètres: l'état initial z^0 qui est de classe C^∞ sur Ω, le contrôle u et une perturbation f qui traduit l'action de forces externes (e.g., la gravité ou des forces électromagnétiques). L'étude d'une telle EDP peut débuter par la construction d'une solution dite *faible*. En effet, soit z une solution de $(EDP_{z^0,u,f})$, alors, pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact dans Ω on vérifie que

$$\int\int_{]0,T[\times\Omega} z\varphi_t \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int\int_{]0,T[\times\Omega} \mathbb{A}(t,z(t))\varphi_t \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$
$$= \int\int_{]0,T[\times\Omega} \mathbb{B}(t,u(t),z(t))\varphi \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int\int_{]0,T[\times\Omega} f\varphi \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Cette égalité a du sens pour $z \in L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $f \in L^1(]0,T[\times\Omega)$ tandis que $(EDP_{z^0,u,f})$ est vérifiée pour z de classe C^2. Le choix du triplet de Gelfand adapté aux ordres de dérivation et aux contraintes au bord du domaine permet de se ramener à l'équation différentielle $(E_{z^0,u,f})$ dont l'inconnue (notée encore z) ne dépend que du temps. Le comportement de l'état à la frontière du domaine Ω est pris en compte dans le choix de l'espace V. Par exemple, sous des conditions de nullité au bord : $V := W_0^{1,p}(\Omega)$. La suite de l'étude du modèle sous forme d'EDP consisterait alors à démontrer qu'une telle solution faible est effectivement une solution de l'EDP. Nous ne le ferons pas ici, et, dans toute la suite, nous nommerons *solution* une telle solution faible.

2.2. **Triplet de Gelfand**

Les états, notés z, sont définis sur l'intervalle de temps $[0,T]$ et prennent leurs valeurs dans des espaces fonctionnels adaptés aux conditions au bord ainsi qu'à la régularité des solutions. Soit H un espace de Hilbert séparable et V un sous-espace dense dans H qui est muni d'une structure d'espace de Banach réflexif et séparable. On convient d'identifier H avec son dual H^* (c'est l'*espace-pivot*) et les injections ci-dessous sont supposées continues et denses

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*.$$

Un tel triplet est appelé *triplet d'évolution* (voir [11]) ou *triplet de Gelfand*. Les normes sur H, V et V^* étant notées respectivement $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_*$, il existe deux constantes positives C et C^* telles que

$$\frac{1}{C^*}\|\cdot\|_* \leq |\cdot| \leq C\|\cdot\|.$$

Le produit scalaire sur H est noté $(\cdot\,,\cdot)$ et le crochet de dualité $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_{V^*\times V}$ est abrégé en $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. On impose la compatibilité entre les deux produits

$$() = \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{|H\times V}.$$

Pour p appartenant à $[1,\infty[$, nous notons $L^p(0,T;V)$ (ou même $L^p(V)$ pour ne pas alourdir les écritures) l'ensemble des classes d'applications fortement mesurables $v : [0,T] \to V$, intégrables au sens de Bochner (voir [4], page 49), et telles que

$$\int_0^T \|v(t)\|^p \mathrm{d}t < +\infty.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_p := \left(\int_0^T \|v(t)\|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

En cas d'ambigüité sur la norme nous serons amenés à préciser les notations; par exemple, $\|\cdot\|_{L^p(H)}$. Dans l'équation $(E_{z^0,u,f})$ nous avons utilisé la notation $\dot{z}$ pour exprimer la dérivée de z par rapport au temps. En effet, l'intégrale au sens de Bochner d'un élément w de $L^p(0,T;V)$ est $\int_{]0,T[} w \in V$. L'espace des états dans lequel nous cherchons d'éventuelles solutions à $(E_{z^0,u,f})$ est

$$W_{pp^*} := \left\{ z \in L^p(0,T;V) \mid \exists w \in L^{p^*}(0,T;V^*) : z(t) = z^0 + \int_{]0,t[} w \text{ p.p. } t \in [0,T] \right\},$$

où $p^* = p/(p-1)$. Ainsi, toute solution est absolument continue et la condition initiale de $(E_{z^0,u,f})$ s'écrit $w(0) = z^0$. L'unique élément w de $(L^p(0,T;V))^*$ associé à z est noté de façon usuelle $\dot{z}$. Le contrôle u appartient à l'espace $L^r(Y)$, où $r = p/(p-2)$ (on pose $r = \infty$ lorsque $p = 2$). A moins de signaler expressément le contraire, Y est un espace de Banach réflexif et séparable. Cette contrainte sur les contrôles nous conduira à imposer $p \in [2,\infty]$. On pourra alors identifier le dual de $L^p(0,T;V)$ avec $(L^p(0,T;V))^*$ (cf. [4], Théorème 3.1 de la page 50). Ainsi, l'ensemble des états

$$W_{pp^*}(0,T) = \{z \in L^p(0,T;V) \mid \dot{z} \in L^{p^*}(0,T;V^*)\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_{W_p} := (\|z\|_p^2 + \|\dot{z}\|_{p^*}^2)^{1/2},$$

est un espace de Banach réflexif et séparable qui s'injecte continûment dans $C([0,T];H)$. Autrement dit, tout élément de $W_{pp^*}(0,T)$ a un unique représentant continu.

3. EXEMPLES

3.1. Modèle non linéaire de déformation mécanique de la glace

Dans le domaine de la mécanique des milieux continus, une déformation élastique se caractérise par sa réversibilité. L'élasticité linéaire concerne des petites déformations où les étirements et les torsions sont proportionnels, respectivement, à la force et au couple exercés. Mais, pour des déformations plus importantes, ce sont des modèles d'élasticité non linéaires qui sont plus adaptés. Nous prenons l'exemple de la déformation mécanique d'une fine plaque de glace où l'on utilise l'opérateur p-Laplacien, fortement non linéaire pour $p > 2$ (voir [3]). Le contrôle est distribué sur le domaine d'espace Ω qui est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. La déformation (déplacement, angle) est l'état du système que nous notons z. Les trois paramètres sont l'état initial z^0, le contrôle mécanique u qui s'exerce sur tout ou partie de la surface et le terme de perturbation f résultant de forces externes (e.g. la gravité). L'EDP qui modélise ce problème est

$$(EDP_{z^0,u,f}) \quad \begin{cases} z_t(t,x,y) - \operatorname{div}(|\nabla z(t,x,y)|^{p-2}\nabla z(t,x,y)) & \\ = \sum_{i=1}^{2} u_i(t) z_i(t,x,y) + f(t,x,y) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z(t,x,y) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0,x,y) = z^0(x,y) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Le contrôle u agit de façon multiplicative sur l'état z qui est l'inconnue. Les positions x appartiennent à la partie bornée de $\mathbb{R}^2$ que nous notons Ω et la durée T de la réaction est strictement positive. Ici, il y a trois paramètres : l'état initial z^0 qui est de classe C^∞ sur Ω, le contrôle u et une perturbation f qui traduit l'action de forces externes (e.g., la gravité ou des forces électromagnétiques). Le choix du triplet de Gelfand $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega)$ adapté aux ordres de dérivation et aux contraintes au bord du domaine permet de se ramener à une équation différentielle dont l'inconnue (notée encore z) ne dépend que du temps. Ici, l'ensemble $W^{1,p}(\Omega)$ est constitué des éléments de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles appartiennent également à $L^2(\Omega)$, et, $V := W_0^{1,p}(\Omega)$ peut être identifié à l'ensemble des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ qui s'annulent presque partout sur la frontière $\partial\Omega$.

Le comportement de l'état à la frontière du domaine Ω est pris en compte dans le choix de l'espace V. Pour tout $v \in V$ l'opérateur p-Laplacien est défini par

$$\Delta_p v := -\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$$

et nous sommes donc conduits, dans ce cadre fonctionnel, à étudier les conditions de stabilité de l'équation différentielle ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) - \Delta_p z(t) = u(t)z(t) + f(t) \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ z(0) = z^0 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

3.2. Modèle de réaction en chaîne avec diffusion

Soit un modèle de réaction où le contrôle agit de façon multiplicative sur l'état. Il est associé à des processus de réaction, diffusion et convection qui sont contrôlés par l'introduction de réactifs chimiques jouant le rôle de catalyseurs ou au contraire qui ralentissent une réaction en chane (voir [12]). C'est également un modèle d'échanges thermiques ; le contrôle est alors la vitesse du fluide. (On peut encore penser à des échanges de masse lors de processus de diffusion.)

Soit Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$. L'équation d'état est

$$(ERC) \qquad \begin{cases} z_t(t,x) - \Delta z(t,x) = u(t,x)z(t,x) + f(t,x) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z(t,x,y) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0,x) = z_0(x) \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Dans le cas de la seule diffusion, le contrôle u et la perturbation f sont nuls. Pour la seule réaction, l'équation (ERC) s'écrit

$$\begin{cases} z_t(t,x) = u(t,x)z(t,x) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ z(t,x,y) = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ z(0,x) = z_0(x) \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Le choix du triplet de Gelfand $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$ adapté aux ordres de dérivation et aux contraintes au bord du domaine permet de se ramener à une équation différentielle dont l'inconnue (notée encore z) ne dépend que du temps.

$$\dot{z}(t) - \Delta z(t) = u(t)z(t) + f(t) \quad \text{p.p. } t \in]0,T[.$$

La condition initiale s'écrit, dans $L^2(\Omega)$,

$$z(0) = z^0.$$

4. HYPOTHÈSES ($\mathcal{H}$)

Nous regroupons ici les hypothèses qui permettent de démontrer que $(E_{z^0,u,f})$ est un problème bien posé dans le cadre fonctionnel décrit ci-dessus.

(H_p) $p \in [2,\infty[$.

(H_{z^0}) $z^0 \in H$.

(H_f) $f \in L^{p^*}(H)$.

(H_A) $A : [0,T] \times V \to V^*$

(1) $\forall v \in V, A(\cdot,v) : [0,T] \to V^*$ est mesurable.

(2) $A(t,\cdot) : V \to V^*$ est bornée pour presque tout $t \in [0,T]$. Plus précisément, en notant $s := \frac{p}{p-1-\alpha}$,

$$\exists \alpha \in [0,p-1],\ \exists a_1 \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+),\ \exists a_2 \in L^s(0,T;\mathbb{R}^+)$$

tels que

$$\|A(t,v)\|_* \leq a_1(t) + a_2(t)\|v\|^\alpha \quad \text{p.p. } t \in [0,T],\ \forall v \in V.$$

(On ne peut pas choisir α strictement supérieur à $p-1$ sinon s serait négatif.)

(3) L'opérateur $A(t,\cdot)$ est p-coercif pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\exists K > 0 : \forall v \in V,\ \langle A(t,v),v\rangle \geq K\|v\|^p.$$

(4) L'opérateur $A(t,\cdot)$ est monotone, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\langle A(t,v_1) - A(t,v_2), v_1 - v_2\rangle \geq 0, \quad \forall v_1,v_2 \in V.$$

(5) Pour tous v_1 et v_2 appartenant à V, pour presque tout $t \in [0,T]$, l'opérateur A est hémicontinu, $\lambda \in \mathbb{R}^+ \mapsto \langle A(t,v_1+\lambda v_2),v_2\rangle$ est continue.

(H_u) $u \in L^r(Y)$ où $r = p/(p-2)$ et Y est un Banach réflexif séparable.

(H_B) $B : [0,T] \times Y \times V \to H$

(1) $\forall u \in Y$, $\forall v \in V$, $B(\cdot,u,v) : [0,T] \to H$ est mesurable.

(2) $\forall v \in V$, $B(t,\cdot,v) \in \mathcal{L}(Y,V)$ pour presque tout $t \in [0,T]$.

(3) $\forall u \in Y$, $B(t,u,\cdot) \in \mathcal{L}(V)$ pour presque tout $t \in [0,T]$.

(4) $\exists b > 0$, $\forall u \in Y$, $\forall v \in V$, $|B(t,u,v)| \leq b\|u\|_Y|v|$ pour presque tout $t \in [0,T]$.

(5) On suppose l'hémicontinuité de $B(t,u,\cdot)$. Pour tous v_1 et v_2 appartenant à V, pour tout u appartenant à Y et pour presque tout t appartenant à $[0,T]$ $\lambda \in \mathbb{R}^+ \mapsto \langle B(t,u,v_1+\lambda v_2),v_2\rangle$ est continue.

Remarque 1. L'hypothèse (H_p) est liée à (H_u) car nous sommes tenus d'imposer la positivité de r. La monotonie ainsi que les hémicontinuités $(H_A)(4–5)$ et $(H_B)(5)$ sont utiles dans la méthode de Galerkin pour assurer la continuité des restrictions de ces opérateurs à des espaces de dimensions finies. La coercivité $(H_A)(3)$ permet d'établir des estimations a priori. Dans cet article, nous imposons à l'opérateur B d'être à valeurs dans H au lieu de V. Cette hypothèse $(H_B)(4)$ est vérifiée sur nos exemples, mais pas dans un cadre plus général. (Par exemple, nous renvoyons pour des opérateurs bilinéaires du type $(u \cdot \nabla)z$ à ([8]) où une autre hypothèse est employée.) Enfin, les hypothèses (H_{z^0}), (H_f), $(H_A)(1–2)$ et $(H_B)(1–4)$ permettent de donner du sens au problème $(E_{z^0,u,f})$ dans des espaces fonctionnels adaptés.

Les deux propositions qui suivent justifient les choix des espaces de la section 2.2. L'équation différentielle de $(E_{z^0,u,f})$ est ainsi une égalité dans $L^{p^*}(V^*)$ et l'état initial appartient à H d'après l'hypothèse (H_{z^0}).

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses* (H_p), (H_A) (1–2), *pour tout* v *appartenant à* $L^p(V)$,

$$A(\cdot,v(\cdot)) \in L^{p^*}(V^*).$$

Démonstration. Commençons par le cas où α appartient à $]0,p-1[$. Sachant que

$$\|A(\cdot,v(\cdot))\|_* \leq a_1(\cdot) + a_2(\cdot)\|v(\cdot)\|^\alpha,$$

et en utilisant le fait que $a_1(\cdot)$ est p^*-intégable au sens de Lebesgue nous devons seulement montrer que $(a_2(\cdot)\|v(\cdot)\|^\alpha)$ est intégrable. Appliquons l'inégalité de Young

$$(a_2(\cdot)\|v(\cdot)\|^\alpha)^{p^*} \leq \frac{p^*}{s} a_2(\cdot)^s + \frac{\alpha p^*}{p}\|v(\cdot)\|^p,$$

où $a_2(\cdot)^s$ et $\|v(\cdot)\|^p$ sont supposées intégrables. Si α est nul alors s est égal à p^* et si α est égal à $p-1$ alors s est infini. Dans ces deux cas on obtient évidemment le résultat attendu.

Proposition 4.2. *Sous les hypothèses* (H_p), (H_B) (1–4), *pour tout* u *appartenant à* $L^r(Y)$ *et pour tout* v *appartenant à* $L^p(V)$,

$$B(\cdot,u(\cdot),v(\cdot)) \in L^{p^*}(H).$$

Démontration.

$$\int_0^T |B(t,u(t),v(t))|^{p^*} \mathrm{d}t \leq \int_0^T b^{p^*} \|u(t)\|_Y^{p^*} |v(t)|^{p^*} \mathrm{d}t.$$

Soit q le conjugué de $p-1$, on vérifie que $p^*q = r$ et $p^*(p-1) = p$. On applique l'inégalité de Hölder à $u \in L^r(Y)$ et $v \in L^p(V)$,

$$\int_0^T |B(t,u(t),v(t))|^{p^*} \mathrm{d}t \leq$$
$$\leq (bC)^{p^*} \left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^{p^*q} \mathrm{d}t \right)^{1/q} \left(\int_0^T \|v(t)\|^{p^*(p-1)} \mathrm{d}t \right)^{1/(p-1)}.$$

Donc

$$\|B(\cdot,u(\cdot),v(\cdot))\|_{L^{p^*}(H)} \leq bC\|u\|_r\|v\|_p. \quad \square$$

Définition. L'état initial z^0 et le contrôle u étant fixés respectivement dans les espaces H et $L^r(Y)$, nous appellerons *solution* de $(E_{z^0,u,f})$ tout état z appartenant à $W_{pp^*}(0,T)$ tel que $(E_{z^0,u,f})$ soit satisfaite.

5. PROBLÈME BIEN POSÉ

Nous démontrons que l'équation d'état $(E_{z^0,u,f})$ est un problème bien posé au sens de Hadamard. Autrement dit, cette équation admet une solution $z_{z^0,u,f}$, cette solution est unique et dépend continûment des paramètres z^0, u et f.

THÉORÈME 5.1. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H})$, si l'injection de V dans H est compacte alors il existe une fonction et une seule appartenant à $W_{pp^*}(0,T) \cap L^\infty(0,T;H)$ qui est solution de $(E_{z^0,u,f})$.*

De plus, en notant $z_{z^0,u,f}$ le représentant continu à valeurs dans H qui prolonge la solution de $(E_{z^0,u,f})$ à $[0,T]$, la fonction

$$\begin{array}{ccc} H \times L^r(Y) \times L^{p^*}(V^*) & \to & C([0,T];H) \\ (z^0,u,f) & \mapsto & z_{z^0,u,f} \end{array}$$

est localement lipschitzienne.

Remarque 2. Le théorème ci-dessus, en ce qui concerne l'existence et l'unicité d'une solution, est une variante d'un théorème de J.-L. Lions (Théorème 1.2, Chapitre 2, page 162, [13]). Ici, l'on tire avantage de la structure de l'équation d'état $(E_{z^0,u,f})$ dans laquelle la partie principale non linéaire est estimée séparément de la partie bilinéaire contenant le contrôle. Le résultat de J.-L. Lions ne peut pas être appliqué à $(E_{z^0,u,f})$. En effet, pour tout contrôle $u \in L^r(Y)$, notons

$$F(\cdot\,,\cdot) = A(\cdot\,,\cdot) - B(\cdot,u,\cdot).$$

D'une part, si $p > 2$ alors l'hypothèse $(H_B)(4)$ ne permet d'assurer, pour $z \in V$, ni de majoration de type $\|F(\cdot,z)\|_* \leq c\|z\|^{p-1}$, ni la p-coercivité de F (respectivement, les hypothèses (1.34) et (1.36) chez J.-L. Lions). D'autre part, même dans le cas où $p = 2$, c'est encore l'hypothèse $(H_B)(4)$ qui n'autorise pas la 2-coercivité de F sans hypothèse supplémentaire sur le contrôle u.

Le problème $(E_{z^0,u,f})$ est posé dans un espace de dimension infinie. On commence par montrer l'unicité de la solution afin de mettre en oeuvre la méthode d'approximation de Galerkin. Cette méthode consiste à résoudre des problèmes approchés dans une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces de dimensions finies. Chaque problème approché est plus facile à résoudre que le problème initial et admet une unique solution. On construit ainsi une suite de solutions notée $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dont on montre la convergence quand la dimension des espaces d'approximation tend vers l'infini. (Cette convergence se démontre à l'aide d'estimations a priori.) La dernière étape de cette démonstration d'existence est la preuve que cette limite est la solution du problème $(E_{z^0,u,f})$. Le résultat de régularité lipschitzienne des solutions repose quant à lui sur une inégalité qui généralise le lemme de Gronwall. On utilise le résultat ci-dessous qui est une conséquence d'un résultat de Willett et Wong (cf. [14] et [9]).

Lemme 5.2. *Soit* $T > 0$, $c \geq 0$ *et* $h \geq 0$, $x : [0,T] \to [0,\infty[$ *et* $y : [0,T] \to [0,\infty[$ *deux fonctions intégrables. Soit* $F : [0,T] \to [0,\infty[$ *et* $h \in [0,1[$ *tels que*

(1) xF^h *et* yF *sont intégrables sur* $[0,T]$,

(2) $F(t) \leq c + \int_0^t xF^h + \int_0^t yF$ *p.p.* $t \in [0,T]$.

Alors, pour presque tout t *appartenant à* $[0,T]$,

$$F(t) \leq \mathrm{e}^{\|y\|_1} \left(c^{1-h} + (1-h) \int_0^t x(s) \exp\left[(h-1) \int_0^s y(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}s \right)^{1/(1-h)}. \tag{5.1}$$

6. DÉMONSTRATIONS

6.1. Unicité

Commençons par démontrer l'unicité d'une solution au problème $(E_{z^0,u,f})$. Supposons l'existence de deux solutions z_1 et z_2. Leur différence $z_1 - z_2$ notée z vérifie

$$\begin{cases} \dot{z}(t) + A(t,z_1(t)) - A(t,z_2(t)) = B(t,u(t),z(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Pour presque tout t appartenant à $[0,T]$, $z(t)$ appartient à V. Intégrons sur $[0,t]$ le produit de dualité ci-dessous

$$\int_0^t \langle \dot{z}(\tau),z(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \langle A(\tau,z_1(\tau)) - A(\tau,z_2(\tau)),z_1(\tau) - z_2(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^t \langle B(\tau,u(\tau),z(\tau)),z(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau,$$

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2 + \int_0^t \langle A(\tau,z_1(\tau)) - A(\tau,z_2(\tau)),z_1(\tau) - z_2(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^t \langle B(\tau,u(\tau),z(\tau)),z(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau.$$

La monotonie $(H_A)(4)$ et l'hypothèse $(H_B)(4)$ fournissent la majoration

$$|z(t)|^2 \leq 2b \int_0^t \|u(\tau)\|_Y |z(\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau.$$

Le lemme de Gronwall permet de conclure à la nullité de z pour presque tout t appartenant à $[0,T]$.

6.2. **Existence de solutions approchées**

L'espace V étant séparable, il existe une suite $(e_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de V telle que:

(1) pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, les premiers termes $e_1,e_2,\ldots,e_m$ sont linéairement indépendants et,

(2) l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de cette suite est dense dans V (et donc dans H et V^*).

Considérons le problème (P_m) ci-dessous posé dans l'espace engendré par $V_m := \mathrm{Vect}\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$. Les solutions de ces systèmes d'équations différentielles ordinaires sont notées $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$.

$$(P_m) \qquad \begin{cases} \dot{z_m}(t) + A(t,z_m(t)) = B(t,u(t),z_m(t)) + f_m(t) & \text{p.p. } t \in [0,T], \\ z_m(0) = z_{0m} & 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

où $f_m(\cdot) := \sum_{j=1}^m \langle f(\cdot),e_j\rangle\, e_j$ et $z_{0m} := \sum_{j=1}^m \left\langle z^0,e_j\right\rangle e_j$.

Proposition 6.1. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H})$ du Théorème* 1*, pour tout $m \geq 1$, le problème (P_m) admet une unique solution z_m qui appartient à V_m.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème d'existence de Carathéodory (cf. [10], Théorème 14) à la fonction $F_m : [0,T] \times V_m \to \mathbb{R}^m$ qui est définie ci-dessous. Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $v \in V_m$, m étant fixé, l'on pose

$$F_m(t,v) := \sum_{j=1}^m [\langle -A(t,z_m(t)) + B(t,u(t),v(t)),e_j\rangle + f_m(t)].$$

La mesurabilité de $F_m(\cdot,v)$, pour tout $v \in V_m$ découle des hypothèses $(H_A)(1)$, $(H_B)(1\text{–}3)$ et (H_f). Sa continuité en v se déduit du fait que, pour presque tout $t \in [0,T]$, les opérateurs $A(t,\cdot)$ et $B(t,u,(t)\cdot)$ sont monotones et hémicontinus.

Donc leurs restrictions aux sous-espaces vectoriels de dimensions finies sont continues (cf. [6], Proposition 9, page 123). Enfin, la condition de minoration sur tout compact de V_m est assurée par les hypothèses $(H_A)(2)$ et $(H_B)(4)$.

6.3. **Estimations a priori**

Le lemme ci-dessous est utile pour démontrer la convergence dans $W_{pp^*}(0,T)$ de la suite des solutions approchées $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$.

LEMME 6.2. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H})$, il existe des constantes m_1, m_2 et m_3 telles que, pour toute solution z de $(E_{z^0,u,f})$, on a les estimations suivantes*

$$\|z\|_{C([0,T];H)} \le m_1, \tag{6.1}$$

$$\|z\|_p \le m_2, \tag{6.2}$$

$$\|\dot z\|_{p^*} \le m_3. \tag{6.3}$$

Démonstration. Pour presque tout t appartenant à $[0,T]$,

$$\langle \dot z(t),z(t)\rangle + \langle A(t,z(t)),z(t)\rangle = \langle B(t,u(t),z(t)),z(t)\rangle + \langle f(t),z(t)\rangle\,.$$

La compatibilité $(\cdot\,,\cdot) = \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{|H\times V}$ et la contrainte imposée à l'opérateur B d'être à valeurs dans H permettent d'obtenir la majoration ci-dessous.

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^p \le b\|u(t)\|_Y|z(t)|^2 + |f(t)||z(t)| \quad \text{p.p. } t\in[0,T]. \tag{6.4}$$

On applique deux fois l'inégalité généralisée de Young. (Pour tout $\epsilon>0$, $a>0$ et $b>0$, on a $ab \le \frac{\epsilon^p a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*\epsilon^{p^*}}$.) Pour tous ϵ et ν strictement positifs, sachant que le conjugué de r est $p/2$, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^p \le b\Big(\frac{\epsilon^r}{r}\|u(t)\|_Y^r + \frac{2C^p}{\epsilon^{p/2}p}\|z(t)\|^p\Big) + $$
$$+\frac{\nu^{p^*}}{p^*}\|f(t)\|_*^{p^*} + \frac{C^p}{\nu^p p}\|z(t)\|^p.$$

Rappelons que l'on note C la constante d'injection de V dans H: $|\cdot| \le C\|\cdot\|$. On peut choisir ϵ et ν tels que

$$\frac{2b}{\epsilon^{p/2}} + \frac{1}{\nu^p} = \frac{pK}{C^p}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|z(t)|^2 \le b\frac{\epsilon^r}{r}\|u(t)\|_Y^r + \frac{\nu^{p^*}}{p^*}\|f(t)\|_*^{p^*} \quad \text{p.p. } t\in[0,T].$$

En intégrant sur $[0,t]$ inclus dans $[0,T]$

$$|z(t)|^2 \leq |z^0|^2 + \frac{2b\epsilon^r}{r}\|u\|_r^r + \frac{2\nu^{p^*}}{p^*}\|f\|_{L^{p^*}(H)}^{p^*} \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

On obtient la première estimation (6.1)

$$\|z\|_{C([0,T];H)} \leq m_1,$$

où

$$m_1 := \left(|z^0|^2 + \frac{2b\epsilon^r}{r}\|u\|_r^r + \frac{2\nu^{p^*}}{p^*}\|f\|_{L^{p^*}(H)}^{p^*}\right)^{1/2}.$$

La seconde estimation (6.2) se déduit de (6.4) en intégrant sur $[0,T]$.

$$K\int_0^T \|z(t)\|^p \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}|z^0|^2 + bm_1^2\int_0^T \|u(t)\|_Y \mathrm{d}t + m_1\int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\|z\|_p \leq m_2,$$

où

$$m_2 := \frac{1}{K^{1/p}}\left(\frac{1}{2}|z^0|^2 + bm_1^2\|u\|_1 + m_1\|f\|_1\right)^{1/p}.$$

La troisième estimation s'obtient en utilisant les deux estimations ci-dessus. Dans l'équation d'état, pour presque tout t appartenant à $[0,T]$,

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq \|A(t,z(t)\|_* + \|B(t,u(t),z(t))\|_* + \|f(t)\|_* \quad \text{p.p.}$$

$$\|\dot{z}(t)\|_* \leq a_1(t) + a_2(t)\|z(t)\|^\alpha + C|B(t,u(t),z(t))| + \|f(t)\|_* \quad \text{p.p.}$$

Notons $a_3(t) := a_1(t) + bCm_1\|u(t)\|_Y + \|f(t)\|_*$.

$$\|\dot{z}(t)\|_*^{p^*} \leq 2^{p^*-1}(a_3^{p^*}(t) + a_2(t)^{p^*}\|z(t)\|^{\alpha p^*}) \quad \text{p.p.}$$

$$\|\dot{z}\|_{p^*}^{p^*} \leq 2^{p^*-1}\left(\int_0^T a_3^{p^*}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T a_2^{p^*}(t)\|z(t)\|^{\alpha p^*}\,\mathrm{d}t\right).$$

D'après les hypothèses $(H_A)(2)$, (H_u) et (H_f), a_3 appartient à $L^{p^*}(V^*)$ et vérifie

$$a_3^{p^*}(t) \leq 2^{p^*-1}[(a_1(t) + \|f(t)\|_*)^{p^*} + (bCm_1\|u(t)\|_Y)^{p^*}].$$

$$a_3^{p^*}(t) \leq 2^{p^*-1}[2^{p^*-1}(a_1^{p^*}(t) + \|f(t)\|_*^{p^*}) + (bCm_1\|u(t)\|_Y)^{p^*}].$$

Or $p^* \in]1;2]$ ainsi $a_1 \in L^{p^*}(\mathbb{R}^+)$ et $u \in L^{p^*}(Y)$.

$$\int_0^T a_3^{p^*}(t)\,\mathrm{d}t \leq 2^{p^*-1}[2^{p^*-1}(\|a_1\|_{p^*}^{p^*} + \|f(t)\|_{p^*}^{p^*}) + (bCm_1\|u(t)\|_{p^*})^{p^*}].$$

De plus $(a_2(t)\|z(t)\|^\alpha)^{p^*}$ est sommable (voir la démonstration de la Proposition 4.2).

$$\int_0^T a_2^{p^*}(t)\|z(t)\|^{\alpha p^*}\,\mathrm{d}t \leq \frac{p^*}{s}\|a_2\|_s^s + \frac{\alpha p^*}{p}\|z\|_p^p.$$

On en déduit la troisième estimation (6.3),

$$\|\dot z\|_{p^*} \le m_3$$

où

$$m_3^{p^*} := 2^{p^*-1}\Big(2^{p^*-1}\big[2^{p^*-1}(\|a_1\|_{p^*}^{p^*} + \|f\|_{p^*}^{p^*}) + (bCm_1\|u\|_{p^*})^{p^*}\big] + \frac{p^*}{s}\|a_2\|_s^s\Big) +$$
$$+\frac{\alpha p^*}{p} m_2^p. \quad \square$$

6.3.1. *Estimations a priori dans le cas où $p = 2$*

Ici $p = 2$ et r est infini. On applique une seule fois l'inégalité généralisée de Young. Pour tout ν strictement positif,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|z(t)|^2 + K\|z(t)\|^2 \le b\|u\|_\infty |z(t)|^2 + \frac{\nu^2}{2}\|f(t)\|_*^2 + \frac{C^2}{2\nu^2}\|z(t)\|^2 \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

(Rappelons que l'on note C la constante telle que $|\cdot| \le C\|\cdot\|$.) Choisissons $\nu = \sqrt{\frac{C}{2K}}$,

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|z(t)|^2 \le b\|u\|_\infty |z(t)|^2 + \frac{\nu^2}{2}\|f(t)\|_*^2 \quad \text{p.p.}$$

On intègre sur $[0,t]$ inclus dans $[0,T]$.

$$|z(t)|^2 \le |z^0|^2 + \nu^2\|f\|_{L^2(V^*)} + 2b\|u\|_\infty \int_0^T |z(t)|^2 \,\mathrm{d}t \quad \text{p.p.}$$

Le lemme de Gronwall permet d'obtenir la première estimation

$$|z(t)|^2 \le (|z^0|^2 + \nu^2\|f\|_{L^2(V^*)}) e^{2bT\|u\|_\infty} \quad \text{p.p.}$$

Ainsi

$$\|z\|_{C([0,T];H)} \le m_1$$

où

$$m_1 := \sqrt{(|z^0|^2 + \nu^2\|f\|_{L^2(V^*)})} e^{2bT\|u\|_\infty}.$$

Les deux estimations suivantes s'obtiennent comme dans le cas où $p > 2$.

$$\|z\|_p \le m_2 \quad \text{et} \quad \|\dot z\|_{p^*} \le m_3$$

où

$$m_2 := \frac{1}{K^{1/2}}\left(\frac{1}{2}|z^0|^2 + 2bTm_1^2\|u\|_\infty + m_1\|f\|_1\right)^{1/2}$$

et

$$m_3 := 2\big(2[2(\|a_1\|_{p^*}^{p^*} + \|f\|_{p^*}^{p^*}) + (bTCm_1\|u\|_\infty)^2] + (1-\alpha)\|a_2\|_s^s) + \alpha m_2^2\big)^{1/2}.$$

6.4. **Passage à la limite**

Montrons à présent la convergence de la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ de solutions des problèmes (P_m) vers une fonction z dans $W_{pp^*}(0,T)$. Il nous restera à établir que z est la solution de $(E_{z^0,u,f})$.

6.4.1. *Convergence des états*

Par construction, la suite des états initiaux $(z_{0m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge vers z^0 dans H. L'estimation a priori (6.1) montre que les termes de la suite des approximations $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont dans un borné de $L^p(V)$ qui est un espace de Banach réflexif. On peut donc extraire de cette suite une sous-suite faiblement convergente au sens de $\sigma(L^p(V),L^{p^*}(V^*))$. Il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $z_1 \in L^\infty(H)$ telles que

$$z_{\phi(n)} \rightharpoonup z_1 \text{ faiblement dans } L^p(V).$$

Dans la suite, l'on notera directement n au lieu de $\phi(n)$. D'après l'estimation a priori (6.2) la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^\infty(H)$ qui est le dual de l'espace séparable $L^1(H)$. Donc il existe une sous-suite faiblement étoile convergente (i.e., au sens de $\sigma(L^\infty(H),L^1(H))$) vers $z_2 \in L^\infty(V)$ telle que

$$z_n \rightharpoonup z_2 \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(V).$$

La proposition ci-dessous va nous permettre de démontrer que ces limites sont égales. Nous noterons

$$z := z_1 = z_2.$$

L'estimation a priori (6.3) assure l'existence de la limite faible $\alpha \in L^{p^*}(V^*)$ pour $\dot{z}_n$,

$$\dot{z}_n \rightharpoonup \zeta \text{ faiblement dans } L^{p^*}(V^*).$$

Les estimations a priori permettent de démontrer la convergence faible des dérivées $(\dot{z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il nous reste à vérifier que cette limite est $\dot{z}$.

PROPOSITION 6.3. *Supposons que l'injection de V dans H est compacte. Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \to V$ telles que*

(i) $z_n(t) = z^0 + \int_0^t \dot{z}_n(s)\mathrm{d}s$, $\dot{z}_n \in L^{p^*}(V^*)$,

(ii) $\exists M_1 \geq 0$ *tel que* $\sup_{n\geq 1} \|z_n\|_{L^\infty(H)} \leq M_1$,

(iii) $\exists M_2 \geq 0$ *tel que* $\sup_{n\geq 1} \|\dot{z}_n\|_{L^{p^*}(V^*)} \leq M_2$,

il existe alors $z : [0,T] \to H$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que

(0) $z(t) = z^0 + \int_0^t \dot{z}(s)\mathrm{d}s$, $\dot{z} \in L^{p^*}(V^*)$,

(1) $\|z_{\varphi(n)} - z\|_{L^\infty(H)} \to 0$,

(2) $\|z_{\varphi(n)} - z\|_{L^p(V)} \to 0$,

(3) $\dot{z}_{\varphi(n)} \rightharpoonup \zeta$ *faiblement dans* $L^{p^*}(V^*)$,

et

$$\zeta = \dot{z}.$$

Remarque 3. Le (2) est une conséquence immédiate du (1) car les intégrations s'effectuent sur le segment $[0,T]$. L'item (3) permet de démontrer que la limite faible des $\dot{z}_n$ est $\dot{z}$. Une conséquence de (2) est l'existence d'une sous-suite extraite notée encore (z_n) telle que pour presque tout t appartenant à $[0,T]$ $(z_n(t))_{\mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $z(t)$. En considérant le représentant continu z on obtient la convergence forte de $(z_n(0))_{\mathbb{N}^*}$ vers $z(0)$ et de $(z_n(T))_{\mathbb{N}^*}$ vers $z(T)$.

Démonstration. L'injection de V dans H étant compacte, on a

$$\forall t \in [0,T], \quad \{z_n(t) : n \geq 1\} \text{ est relativement compacte dans } H.$$

Montrons que $\{z_n : n \geq 1\}$ est équicontinue dans $C([0,T];H)$. Soit $0 \leq t \leq t' \leq T$,

$$|z_n(t) - z_n(t')| \leq \int_t^{t'} \|\dot{z}_n\|_*(s)\mathrm{d}s,$$

$$\int_t^{t'} \|\dot{z}_n(s)\|_*\mathrm{d}s = \int_0^T 1_{[t,t']}\|\dot{z}_n(s)\|_*\mathrm{d}s,$$

où $1_{[t,t']}$ est la fonction caractéristique qui vaut 1 sur $[t,t']$. L'inégalité de Hölder fournit la majoration

$$\int_0^T 1_{[t,t']}\|\dot{z}_n(s)\|_*\mathrm{d}s \leq \|1_{[t,t']}\|_p\|\dot{z}_n\|_{p^*}.$$

L'hypothèse (iii) permet de conclure

$$\int_t^{t'} \|\dot{z}_n(s)\|_*\mathrm{d}s \leq M_3(t'-t)^{1/p}.$$

On déduit du théorème d'Ascoli-Arzelà ([2]) que la suite (z_n) est relativement compacte dans $C([0,T],H)$ pour la norme uniforme. On peut extraire une sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément vers une limite z. De plus la suite $(\dot{z}_{\varphi(n)})$ admet une limite faible ζ dans $L^{p^*}(V^*)$. En particulier, pour l'application caractéristique $1_{[0,t]}$ qui appartient à $L^p(V)$ pour tout t de $[0,T]$ et pour tout v appartenant à V on peut écrire

$$\int_0^T \left\langle 1_{[0,t]}v,\dot{z}_{\varphi(n)}(s)\right\rangle \mathrm{d}s \to \int_0^T \left\langle 1_{[0,t]}v,\zeta(s)\right\rangle \mathrm{d}s.$$

Ainsi

$$\left\langle v, \int_0^t \dot{z}_{\varphi(n)}(t)\mathrm{d}s\right\rangle \to \left\langle v, \int_0^t \zeta(s)\mathrm{d}s\right\rangle.$$

Quand n tend vers l'infini, l'égalité (i) donne

$$\langle v,z(t)\rangle = \langle v,z^0\rangle + \left\langle v, \int_0^t \zeta(s)\mathrm{d}s\right\rangle.$$

Donc ζ est égal à $\dot{z}$ et z est absolument continue.

6.4.2. *Limite des termes $B(\cdot,u_n(\cdot),z_n(\cdot))$*

LEMME 6.4. *Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \to V$ qui vérifient les hypothèses de la Proposition* 6.3. *Supposons* $(H_B)(1\text{–}5)$*, alors*

$$B(\cdot,u(\cdot),z_n(\cdot)) \to B(\cdot,u(\cdot),z(\cdot)) \text{ fortement dans } L^{p^*}(V^*).$$

Démonstration. L'application $v \in L^p(V) \mapsto B(\cdot,u(\cdot),v(\cdot)) \in L^{p^*}(V^*)$ est continue, ainsi

$$\|B(\cdot,u(\cdot),z_n(\cdot)) - B(\cdot,u(\cdot),z(\cdot))\|_{p^*} \leq b\|u\|_r\|z_n - z\|_p.$$

La Proposition 6.3 nous permet d'extraire de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite qui converge fortement vers z dans $L^p(V)$.

LEMME 6.5. *Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \to V$ qui vérifient les hypothèses de la Proposition* 6.3. *Supposons* $(H_B)(1\text{–}5)$*, alors*

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)),z_n(t)\rangle\ \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z(t)\rangle\ \mathrm{d}t$$

faiblement dans $L^{p^*}(V^*)$.

Démonstration. Rappelons que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement dans $L^p(H)$ vers z et que pour tout $t \in [0,T]$ la suite $(z_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge fortement dans H vers $z(t)$. Ainsi

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)),z_n(t)\rangle\ \mathrm{d}t = \int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t) - z_n(t)),z_n(t)\rangle\ \mathrm{d}t - \\ - \int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z_n(t)\rangle\ \mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t) - z_n(t)),z_n(t)\rangle\ \mathrm{d}t \leq b\int_0^T \|u(t)\|_Y|z_n(t) - z_n(t)||z_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \\ \leq \|u(t)\|_r\|z_n(t) - z_n(t)\|_{L^p(H)}\|z_n(t)\|_{L^p(H)},$$

où le majorant tend vers 0 quand z_n tend vers z au sens fort. D'autre part, sachant que $B(\cdot,u(\cdot),z(\cdot)) \in L^{p^*}(V^*)$ et que z_n tend faiblement vers z on en déduit que

$$\int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z_n(t)\rangle \,\mathrm{d}t \to \int_0^T \langle B(t,u(t),z(t)),z(t)\rangle \,\mathrm{d}t. \quad \square \tag{6.5}$$

6.4.3. *Limite des termes non linéaires*

L'hypothèse $(H_A)(2)$ et la seconde estimation a priori permettent de borner $A(\cdot,z_n(\cdot))$ dans $L^{p^*}(V^*)$ ainsi on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $L^{p^*}(V^*)$ vers une application notée $\mathcal{A}$. Il reste à montrer que cette limite est égale à $A(\cdot,z(\cdot))$.

Proposition 6.6. *Soit une suite d'applications $z_n : [0,T] \to V$ qui vérifient les hypothèses de la Proposition* 6.3. *On note encore z sa limite au sens de* (0)–(3) *de cette même proposition. Soit une sous-suite extraite de $A(\cdot,z_n(\cdot)) \in L^{p^*}(V^*)$ qui converge faiblement dans $L^{p^*}(V^*)$ vers une application notée $\mathcal{A}(z)$. On a*

$$\mathcal{A}(z(\cdot)) = A(\cdot,z(\cdot)).$$

Démonstration. Par monotonie de A, pour tout v appartenant à $L^p(V)$,

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t)) - A(t,v(t)),z_n(t) - v(t)\rangle \,\mathrm{d}t \geq 0. \tag{6.6}$$

La solution de (P_n) étant z_n,

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t)),z_n(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}|z_{0n}|^2 - \frac{1}{2}|z_n(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t),z_n(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \\ + \int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)),z_n(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

On peut donc décomposer

$$\int_0^T \langle A(t,z_n(t)) - A(t,v(t)),z_n(t) - v(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}|z_{0n}|^2 - \frac{1}{2}|z_n(T)|^2 + \\ + \int_0^T \langle f(t),z_n(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle B(t,u(t),z_n(t)),z_n(t)\rangle \,\mathrm{d}t - \\ - \int_0^T \langle A(t,z_n(t)),v(t)\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^T \langle A(t,v(t)),z_n(t) - v(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Quand n tend vers $+\infty$ nous avons les convergences des différents termes

$$
\begin{gathered}
|z_{0n}|^2 \to |z_0|^2 \\
|z_n(T)|^2 \to |z(T)|^2 \\
\int_0^T \langle f(t), z_n(t)\rangle \, \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle f(t), z(t)\rangle \, \mathrm{d}t \\
\int_0^T \langle A(t, z_n(t)), v(t)\rangle \, \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle \mathcal{A}(z(t)), v(t)\rangle \, \mathrm{d}t \\
\int_0^T \langle A(t, v(t)), z_n(t) - v(t)\rangle \, \mathrm{d}t \to \int_0^T \langle A(t, v(t)), z(t) - v(t)\rangle \, \mathrm{d}t.
\end{gathered}
$$

On déduit du Lemme 6.5 la minoration ci-dessous.

$$
\begin{aligned}
(6.7) \quad & \frac{1}{2}|z_0|^2 - \frac{1}{2}|z(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), z(t)\rangle \, \mathrm{d}t + \int_0^T \langle B(t, u(t), z(t)), z(t)\rangle \, \mathrm{d}t - \\
& - \int_0^T \langle A(t, z(t)), v(t)\rangle \, \mathrm{d}t - \int_0^T \langle A(t, v(t)), z(t) - v(t)\rangle \, \mathrm{d}t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Rappelons que le problème s'écrit

$$
\begin{cases} \dot{z} + \mathcal{A}(z) = B(\cdot, u, z) + f \\ z(0) = z^0. \end{cases}
$$

En intégrant par parties sur $[0,T]$

$$
\begin{aligned}
(6.8) \quad \int_0^T \langle \mathcal{A}(z(t)), z(t)\rangle \, \mathrm{d}t = & \frac{1}{2}|z_0|^2 - \frac{1}{2}|z(T)|^2 + \int_0^T \langle f(t), z(t)\rangle \, \mathrm{d}t + \\
& + \int_0^T \langle B(t, u(t), z(t)), z(t)\rangle \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

On déduit de (6.6), (6.7) et (6.8),

$$
\int_0^T \langle \mathcal{A}(z(t)) - A(t, v(t)), z(t) - v(t)\rangle \, \mathrm{d}t \geq 0.
$$

Pour λ strictement positif et ω appartenant à $L^p(V)$ tels que $v = z - \lambda w$, l'hémicontinuité de A donne

$$
\int_0^T \langle \mathcal{A}(z(t)) - A(t, z(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle \, \mathrm{d}t \geq 0.
$$

Quand λ tend vers 0,

$$
\int_0^T \langle \mathcal{A}(z(t)) - A(t, z(\cdot)), w(t)\rangle \, \mathrm{d}t \geq 0.
$$

Mais en échangeant w en $-w$ on obtient la nullité du terme de gauche. Donc

$$\mathcal{A}(z(\cdot)) = A(\cdot,z(\cdot)). \quad \square$$

6.4.4. *Solution de* $(E_{z^0,u,f})$

Soit $j \in \mathbb{N}$ fixé, pour tout $m \in \mathbb{N}$, en notant z_m l'unique solution de P_m et en faisant tendre m vers $+\infty$,

$$\begin{gathered}\langle A(t,z_m(t)) - B(t,u(t),z_m(t)) - f_m(t),e_j\rangle \to \\ \langle A(t,z_m(t)) - B(t,u(t),z(t)) - f(t),e_j\rangle .\end{gathered}$$

Ainsi

$$\langle \dot{z}_m(t),e_j\rangle \to \langle \dot{z}(t),e_j\rangle .$$

La famille $\{e_j,j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans V donc

$$\dot{z}(t) + A(t,z(t)) - B(t,u(t),z(t)) - f(t), \quad \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Une des conséquences de la Proposition 6.3 est l'existence d'une sous-suite extraite notée encore (z_n) telle que pour presque tout t appartenant à $[0,T]$ $(z_n(t))_{\mathbb{N}^*}$ converge fortement vers $z(t)$. En considérant le représentant continu à valeurs dans H qui prolonge z à $[0,T]$, l'on obtient la convergence forte de $(z_n(0))_{\mathbb{N}^*}$ vers $z(0)$ et l'unique solution de $(E_{z^0,u,f})$.

6.5. **Démonstration de la régularité de la fonction d'état**

Démonstration. Considérons z^0 et ζ appartenant à H, u et v à $L^r(Y)$ ainsi que f et g à $L^{p^*}(V^*)$. Nous avons démontré ci-dessus que les équations $(E_{z^0,u,f})$ et $(E_{z^0+\zeta,u+v,f+g})$ admettent des solutions uniques. Nous les notons respectivement $\bar{z}$ et $\bar{z}+w$. On peut vérifier aisément que w est la solution de

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{w}(t) + A(t,(\bar{z}+w)(t)) - A(t,\bar{z}(t) = \\ \quad = B(t,u(t),w(t)) + B(t,v(t),(\bar{z}+w)(t)) + g(t) \quad \text{p.p.} \\ w(0) = \zeta.\end{array}\right.$$

Soit $[0,t]$ inclus dans $[0,T]$, on intègre les produits de dualités avec $w(\cdot)$ pour obtenir l'égalité ci-dessous

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 - \frac{1}{2}|\zeta|^2 + \int_0^t \langle A(s,(\bar{z}+w)(s) - A(s,\bar{z}(s)),(\bar{z}+w)(s) - \bar{z}(s)\rangle\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^t \langle B(s,u(s),w(s)),w(s)\rangle \,\mathrm{d}s + \int_0^t \langle B(s,v(s),(\bar z + w)(s)),w(s)\rangle \,\mathrm{d}s +$$
$$+ \int_0^t \langle g(s),w(s)\rangle \,\mathrm{d}s.$$

L'hypothèse $(H_A)(3)$ (monotonie de A) nous permet d'établir la minoration

$$\int_0^t \langle A(s,(\bar z + w)(s) - A(s,\bar z(s)),w(s)\rangle \,\mathrm{d}s \geq 0.$$

La majoration ci-dessous découle de l'hypothèse $(H_B)(4)$

$$\int_0^t \langle B(s,u(s),w(s)),w(s)\rangle \,\mathrm{d}s + \int_0^t \langle B(s,v(s),(\bar z + w)(s)),w(s)\rangle \,\mathrm{d}s \leq$$
$$\leq b\int_0^t (\|u(s)\|_Y |w(s)|^2 + \|v(s)\|_Y |(\bar z + w)(s)|\,|w(s)|)\,\mathrm{d}s.$$

En notant $C_1(s) := 2(b\|v(s)\|_Y \|(\bar z + w)(s)\| + \|g(s)\|_*)$ et $C_2(s) := 2b\|u(s)\|_Y$, nous déduisons la majoration

$$|w(t)|^2 \leq |\zeta|^2 + \int_0^t C_1(s)|w(s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^t C_2(s)|w(s)|^2 \,\mathrm{d}s.$$

L'inégalité de Willett-Wong (5.1) nous apprend que

$$|w(t)| \leq e^{\frac12 \int_0^t C_2(s)\,\mathrm{d}s} \left[|\zeta| + \frac12 \int_0^t C_1(s) \exp\left(-\frac12 \int_0^s C_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}s\right].$$

Utilisons à présent la première estimation a priori (6.1) de $\bar z + w$ qui est la solution de $(E_{z^0+\zeta,u+v,f+g})$. Il existe une constante $M_{\zeta,v,g}$ telle que, si $|\zeta|$, $\|v\|_r$ et $\|g\|_{p^*}$ sont majorées, alors

$$\|(\bar z + w)(t)\|_p \leq M_{\zeta,v,g}.$$

Comme r et p^* sont supérieurs à un, nous avons les inclusions $L^r(Y) \subset L^1(Y)$ et $L^{p^*}(H) \subset L^1(H)$. En outre, $p \geq 2$, ainsi l'inégalité de Hölder donne

$$\|u\|_1 \leq T^{1/r}\|u\|_r, \quad \|v\|_1 \leq T^{1/p}\|v\|_r, \quad \|g\|_1 \leq T^{1/p^*}\|g\|_{p^*}.$$

On en déduit la nouvelle majoration ci-dessous

$$|w(t)| \leq e^{bT^{1-1/r}\|u\|_r}\left[|\zeta| + bT^{1-1/p}M_{\zeta,v,g}\|\bar z + w\|_p + \tfrac12 T^{1-1/p^*}\|g\|_{p^*}\right].$$

Notons

$$\lambda := e^{bT^{1-1/r}\|u\|_r} \max\left\{1, bT^{1-1/p}M_{\zeta,v,g}, \tfrac12 T^{1-1/p^*}\right\},$$

pour conclure

$$|w(t)| \leq \lambda(|\zeta| + \|v\|_r + \|g\|_{p^*}).$$

RÉFÉRENCES

[1] A. Addou and A. Benbrik, *Existence and uniqueness of optimal control for a distributed-parameter bilinear system.* J. Dynam. Control Systems **8** (2002), *2*, 141–152.

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] **264**, Set-valued maps and viability theory, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] J.L. Vázquez, *The porous medium equations: mathematical theory.* Oxford University Press Inc., New York, 2007.

[4] V. Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces.* Mathematics and its Applications (East European Series) **10**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht 1986.

[5] M.E. Bradley, S. Lenhart and J. Yong, *Bilinear optimal control of the velocity term in a Kirchhoff plate equation.* J. Math. Anal. Appl. **238** (1999), *2*, 451–467.

[6] H. Brézis, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), *1*, 115–175.

[7] C. Bruni, G. DiPillo and G. Koch, *Bilinear systems: an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications.* IEEE Trans. Automatic Control, AC-**19** (1974), 334–348.

[8] J.-M. Clérin, *Problèmes de contrôle optimal du type bilinéaire gouvernés par des équations aux dérivées partielles d'évolution.* Thèse, LANLG, Université d'Avignon, 2009. Disponible sur `http://tel.archives-ouvertes.fr`

[9] J.-M. Clérin and M. Moussaoui, *A Priori Estimates in Perturbed Bilinear Optimal Control.* LANLG, Université d'Avignon, 2007, Preprint **72**.

[10] J. Droniou, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles.* Polycopié gm3-02, Université de Provence, CMI, Marseille, 2001. Disponible sur `http://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/index.html`

[11] I.M. Gel'fand and N.Ya. Vilenkin, *Generalized functions.* Vol. 4, *Applications of harmonic analysis.* Academic Press, New York, 1964.

[12] A.Y. Khapalov, *Controllability of the semilinear parabolic equation governed by a multiplicative control in the reaction term: a qualitative approach.* SIAM J. Control Optim. **41** (2003), *6*, 1886–1900 (electronic).

[13] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, 1969.

[14] D. Willett and J.S.W. Wong, *On the discrete analogues of some generalizations of Gronwall's inequality.* Monatsh. Math. **69** (1965), 362–367.

Reçu 16 juillet 2010

Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse
Laboratoire d'Analyse Non Linéaire
et Géométrie (EA 2151)
33 rue Louis Pasteur
84018 Avignon Cedex, France