CHAMP DE YANG-MILLS AVEC GROUPE DE JAUGE $SU(2)$ (YANG-MILLS FIELD WITH $SU(2)$ AS GAUGE GROUP)

A. LESFARI

Communicated by Vasile Brînzănescu

In this paper we consider a hamiltonian system which, in a special case and under the gauge group $SU(2)$, can be considered as some reduction of the Yang-Mills field equations. We study this system from a different angle. We show that this system is completely integrable and we realize explicitly, using the Lax spectral curve technique that the flows generated by the constants of the motion are straight lines on the Jacobi variety of a genus 2 hyperelliptic curve. We show that at some special values of the parameters, we can describe elliptic solutions which are associated with two-gap elliptic solitons of the Korteweg-de Vries equation. We show that the complex affine variety defined by putting the invariants of the system equal to generic constants completes into an abelian surface and the system is algebraic completely integrable. We give a direct proof that the abelian surface obtained in this paper is dual to Prym variety of an hyperelliptic curve of genus 3.

AMS 2010 Subject Classification: 70H05, 70H06, 14H70, 14H40.

Key words: hamiltonian, integrable systems, lax representation, curves, abelian surfaces, Jacobian varieties, prym varieties.

1. INTRODUCTION

On commence par introduire brièvement quelques notions liées au Champ de Yang-Mills avec groupe de jauge (groupe de symétrie locale) $SU(2)$. Pour des considérations générales et le détail de certaines notions, on pourra consulter par exemple [5]. Notre objectif ici est de montrer la liaison entre les équations de Yang-Mills et les systèmes hamiltoniens et de pouvoir les résoudre à l'aide de différentes méthodes. Considérons le groupe spécial unitaire $SU(2)$ de degré deux qui est le groupe des matrices complexes 2×2 unitaires à déterminant unité. C'est un groupe de Lie réel de dimension trois. Il est compact, simplement connexe, simple et semi-simple. Le groupe $SU(2)$ est isomorphe à celui des quaternions de module égal à 1 et difféomorphe à la sphère S^3 de dimension trois. Il est bien connu que les quaternions représentent les rotations dans l'espace à trois dimensions et dès lors il existe un homomorphisme surjectif de $SU(2)$ sur le groupe $SO(3)$ dont le noyau se décompose de l'application identique et de son opposée. L'algèbre de Lie $su(2)$ correspondant à $SU(2)$ est constituée des matrices complexes 2×2 antihermitiennes de trace nulle, le commutateur standard servant de crochet de Lie. C'est une algèbre réelle. L'algèbre $su(2)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $so(3)$. On considère dans cette partie le champ de Yang-Mills F_{kl} comme étant un champ vectoriel à valeurs dans l'algèbre $su(2)$. C'est une expression locale du champ de jauge ou connexion définissant la dérivée covariante de F_{kl} dans la représentation adjointe de $su(2)$. Pour déterminer cette expression, notons que chaque composante de Lorentz du champ de Yang-Mills se développe sur une base $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de $su(2)$, $A_k = A_k^\alpha \sigma_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ où les σ_α sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont souvent utilisées en mécanique quantique pour représenter le spin des particules. D'ailleurs le groupe $SU(2)$ est associé à une symétrie de jauge dans la description de l'interaction faible ou force faible (l'une des quatre forces fondamentales de la nature) et possède donc une importance particulière en physique des particules. La dynamique de la théorie de Yang-Mills est déterminée par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr\{F_{kl} F^{kl}\}, \quad 1 \leq k, l \leq 4, ,$$

où

$$F_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial \tau_k} - \frac{\partial A_k}{\partial \tau_l} + [A_k, A_l],$$

est l'expression des tenseurs antisymétriques de Farady à valeurs dans $su(2)$. Ces tenseurs ne sont pas invariants (sous la transformation) de jauge. Par contre, on vérifie que $Tr\{F_{kl} F^{kl}\}$ est effectivement invariant de jauge. La trace porte sur l'espace interne $su(2)$. Les équations du mouvement sont données par

$$D_k F^{kl} = \frac{\partial F^{kl}}{\partial \tau_k} + \left[A_k, F^{kl}\right] = 0, \qquad F_{kl}, A_k \in su(2), \quad 1 \leq k, l \leq 4,$$

avec D_k la dérivée covariante dans la représentation adjointe de l'algèbre $su(2)$ et dans laquelle $\left[A_k, F^{kl}\right]$ est le crochet des deux champs dans $su(2)$. La théorie de Yang-Mills étend le principe d'invariance de jauge de l'électromagnétisme à d'autres groupes de transformations continues de Lie. Ainsi, le tenseur F_{kl} généralise le champ électromagnétique et les équations de Yang-Mills sont la généralisation non commutative des équations de Maxwell. Dans le cas qui nous intéresse, on a $\frac{\partial A_l}{\partial \tau_k} = 0, (k \neq 1)$, $A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = n_1 U_1 \in su(2)$,

$A_4 = n_2 U_2 \in su\,(2)$, où $n_1 = [n_2, [n_1, n_2]]$ et $n_2 = [n_1, [n_2, n_1]]$ engendre $su(2)$ et le système de Yang-Mills devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + U_1 U_2^2 &= 0, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + U_2 U_1^2 &= 0, \end{aligned}$$

avec $t = \tau_1$. En posant $U_1 = q_1$, $U_2 = q_2$, $\frac{\partial U_1}{\partial t} = p_1$, $\frac{\partial U_2}{\partial t} = p_2$, les équations de Yang-Mills s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien

$$\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad x = (q_1, q_2, p_1, p_2)^\intercal, \qquad J = \begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix},$$

où

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 q_2^2\right).$$

Ce système hamiltonian joue un rôle important en théorie des champs et nous allons l'étudier en détail à l'aide de différentes méthodes.

2. SYSTÈME COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE

Rappelons qu'un système hamiltonien définie sur l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$ est complètement intégrable lorsqu'il possède n intégrales premières $H_1 \equiv H$, $H_2, \ldots, H_n$ en involution (c'est-à-dire que les crochets de Poisson $\{H_i, H_j\}$ s'annulent deux à deux) et qu'en outre les gradients $gradH_i$ sont linéairements indépendants. Pour des constantes génriques $c = (c_1, \ldots, c_n)$, l'ensemble de niveau commun aux intégrales $H_1, \ldots, H_n$:

$$M_c = \{x \equiv (y_1, ..., y_n, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{2n} : H_1(x) = c_1, \ldots, H_n(x) = c_n\},$$

forme une variété de dimension n. D'après le théorème d'Arnold-Liouville [3], si la variété M_c est compacte et connexe, alors elle est difféomorphe au tore réel tore de dimension n sur lequel le problème se linéarise.

En utilisant la transformation symplectique : $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2)$, $p_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_2)$, $q_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 (y_1 + iy_2)$, $q_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 (y_1 - iy_2)$, on réecrit le hamiltonien précédent sous la forme

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2.$$

Le système dynamique hamiltonien associé à H s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= x_1, \qquad \dot{x}_1 = -\left(y_1^2 + y_2^2\right) y_1, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\left(y_1^2 + y_2^2\right) y_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Ces équations donnent un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$. L'existence d'une seconde intégrale première indépendante et en involution avec $H_1 \equiv H$, suffit pour que le système soit complètement intégrable. Le système différentiel ci-dessus implique

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \left(y_1^2 + y_2^2\right) y_1 = 0,\\ \ddot{y}_2 + \left(y_1^2 + y_2^2\right) y_2 = 0,\end{aligned}$$

de sorte qu'évidemment la fonction (le moment)

$$H_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

est une intégrale première. Les fonctions H_1 et H_2 sont en involution

$$\{H_1, H_2\} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k} \frac{\partial H_2}{\partial y_k} - \frac{\partial H_1}{\partial y_k} \frac{\partial H_2}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Donc cette seconde intégrale première, détermine avec H_1 un système complètement intégrable. Soit

$$M_c = \left\{ x \equiv (y_1, y_2, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 : H_1(x) = c_1, H_2(x) = c_2 \right\},$$

la surface invariante. En substituant $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$, dans les équations

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2 = c_1 \\ H_2 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = c_2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + \frac{1}{4} r^2 = c_1, \qquad r^2 \dot{\theta} = -c_2.$$

D'où

$$(r\dot{r})^2 + \frac{1}{2} r^4 - 2c_1 r^2 + c_2^2 = 0,$$

et par conséquent

$$w^2 + P(z) = 0,$$

où $w \equiv r\dot{r}$, $z \equiv r^2$, et

$$P(z) = \frac{1}{2} z^3 - 2c_1 z + c_2^2.$$

La surface de Riemann

$$\mathcal{C} = \overline{\{(w, z) : w^2 + P(z) = 0\}}, \tag{2}$$

est lisse et hyperelliptique. Le polynôme $P(z)$ étant de degré 3, la surface de Riemann $\mathcal{C}$ est de genre $g = 1$. On a donc une seule différentielle holomorphe $\omega = \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$, et la linéarisation s'effectue donc sur la courbe elliptique $\mathcal{C}$. Bien que la variété M_c est de dimension 2, on a ici une réduction de dimension 1 et par conséquent, on a le résultat suivant :

Theorem 1. *Le système différentiel (1) est complètement linéarisé sur la variété jacobienne de $\mathcal{C}$, i.e. la courbe elliptique $\mathcal{C}$ (2).*

3. GÉNÉRALISATION ET INTÉGRATION À L'AIDE DE FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES DE GENRE DEUX

Notons que le hamiltonien lié au système de Yang-Mills est un cas particulier de celui-ci

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(y_1^2 + y_2^2\right)^2, \tag{3}$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes. Le système correspondant est donné par

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= x_1, \qquad \dot{x}_1 = \left(\lambda_1 - y_1^2 - y_2^2\right) y_1, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \qquad \dot{x}_2 = \left(\lambda_2 - y_2^2 - y_1^2\right) y_2. \end{aligned} \tag{4}$$

THEOREM 2. *Le système différentiel (4) admet une paire de Lax de sorte que la fonction*

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{4}\left(\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)^2 - \left(\lambda_2 y_1^4 + \lambda_1 y_2^4\right) - \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) y_1^2 y_2^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \lambda_2 \left(y_1^2 + y_2^2\right) - \left(\lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2\right)\right). \end{aligned}$$

est une intégrale première quartique et la linéarisation s'effectue sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2.

Démonstration. Nous allons montrer qu'il y a une autre intégrale première H_2 quartique qui détermine avec $H_1 \equiv H$ (3), un système intégrable. Pour déterminer explicitement cette intégrale première, on utilise la méthode de la courbe spectrale. Considérons la forme de Lax $\dot{A} = [A, B]$, où A et B sont des matrices à coefficients dans une algèbre de Lie. On sait que les coefficients du polynôme caratéristique $\det(A - zI)$, ne dépendent pas du temps et ce sont des intégrales premières en involution. En outre, le flot se linéarise sur un tore algébrique complexe. Celui-ci étant engendré par le réseau défini par la matrice des périodes de la courbe algébrique complexe projective (ou courbe spectrale), d'équation affine

$$P(h, z) \equiv \det(A - zI) = 0, \tag{5}$$

et cette équation décrit une déformation isospectrale. Dans le cas de notre système, on choisit suivant une méthode d'Eilbeck & al. [6, 7] les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$V = -(h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{h-\lambda_1} + \frac{y_2^2}{h-\lambda_2}\right)\right),$$

$$U = \frac{1}{2}(h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(\frac{x_1y_1}{h-\lambda_1}+\frac{x_2y_2}{h-\lambda_2}\right),$$
$$W = (h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(\frac{1}{2}(\frac{x_1^2}{h-\lambda_1}+\frac{x_2^2}{h-\lambda_2})-h+\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)\right),$$
$$R = h-y_1^2-y_2^2.$$

Explicitement, l'équation (5) fournit

$$(6)\ \mathcal{H}: z^2 = P_5(h), \quad = (h-\lambda_1)(h-\lambda_2)\left(h^3-(\lambda_1+\lambda_2)h^2+(\lambda_1\lambda_2-H_1)h-H_2\right),$$

avec $H_1 \equiv H$ donné par (3) et

$$H_2 = -\frac{1}{4}\left(\lambda_2y_1^4+\lambda_1y_2^4+(\lambda_1+\lambda_2)y_1^2y_2^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2\right) -\frac{1}{2}\left(\lambda_2x_1^2+\lambda_1x_2^2-\lambda_1\lambda_2(y_1^2+y_2^2)\right).$$

On vérifie aisément que les deux intégrales premières H_1 et H_2 sont en involution :

$$\{H_1,H_2\} = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_k}\frac{\partial H_2}{\partial y_k}-\frac{\partial H_1}{\partial y_k}\frac{\partial H_2}{\partial x_k}\right)=0,$$

et que le système en question est intégrable. Le flot est donc linéaire sur la variété jacobienne de la courbe d'équation affine (6). Le polynôme $P_5(h)$ étant de degré cinq, la courbe est de genre 2 et on a donc une linéarisation sur la jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2. Introduisons, suivant une méthode de Vanhaecke [18], deux coordonnées s_1 et s_2 sur la surface invariante

$$M_c = \bigcap_{i=1}^{2}\left\{x\in\mathbb{C}^4 : H_i(x)=c_i\right\}, \tag{7}$$

telles que : $M_c(s_i)=0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, *i.e.*,

$$s_1+s_2 = \frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)+\lambda_1+\lambda_2, \tag{8}$$

$$s_1s_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_2y_1^2+\lambda_1y_2^2\right)+\lambda_1\lambda_2. \tag{9}$$

Un calcul direct montre que :

$$\dot{s}_1 = 2\frac{\sqrt{P_5(s_1)}}{s_1-s_2}, \qquad \dot{s}_2 = 2\frac{\sqrt{P_5(s_2)}}{s_2-s_1},$$

où le polynôme $P_5(s)$ est défini par (6). Ces équations s'intégrent *via* l'application d'Abel

$$\mathcal{H}\longrightarrow Jac(\mathcal{H})=\mathbb{C}^2/\Lambda,\ p\longmapsto\left(\int_{p_0}^{p}\omega_1\ ,\ \int_{p_0}^{p}\omega_2\right),$$

où $\mathcal{H}$ est la surface de Riemann hyperelliptique donnée par l'équation (6), Λ est le réseau engendré par les vecteurs $n_1 + \Omega n_2$, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, Ω est la matrice des périodes de la surface de Riemann $\mathcal{H}$ et (ω_1, ω_2) une base de différentielles holomorphes sur $\mathcal{H}$, *i.e.*,

$$\omega_1 = \frac{ds}{\sqrt{P_5(s)}}, \qquad \omega_2 = \frac{sds}{\sqrt{P_5(s)}},$$

avec p_0 un point fixé. Le théorème est donc démontré. □

Remark 3. Le hamiltonien (3) est lui même un cas particulier d'une hiérarchie décrite par le hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2\right) + Ay_1^4 + By_1^2 y_2^2 + Cy_2^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{y_1^2} + \frac{\beta}{y_2^2}\right),$$

Ce dernier décrit le mouvement de particules interagissant avec un potentiel quartique : $Ay_1^4 + By_1^2y_2^2 + Cy_2^4$ et perturbé par $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{y_1^2} + \frac{\beta}{y_2^2}\right)$. Il est connu que le potentiel quartique non perturbé est séparable dans les quatre cas suivants : (i) $A : B : C = 1 : 2 : 1$, (ii) $A : B : C = 1 : 12 : 16$, (iii) $A : B : C = 1 : 6 : 1$, (iv) $A : B : C = 1 : 6 : 8$, et les systèmes hamiltoniens correspondants sont complètement intégrables. Les cas (i), (ii) et (iii) sont séparables respectivement en coordonnées ellipsoïdal, paraboloidal et cartésiennes, tandis que le cas (iv) est séparable en général. Les cas (iii) et (iv) se sont avérées canoniquement équivalents sous l'action d'une application de Miura restreinte aux équations stationnaires couplées de Korteweg-de Vries (KdV) associée à un opérateur de Lax, d'ordre quatre. Dans chacun des cas mentionnés ci-dessus, le système hamiltonien en question admet une paire de Lax; les courbes spectrales sont des courbes hyperelliptiques dans les cas (i), (ii) et une courbe 4-gonal dans les cas (iii), (iv).

4. THÉORIE DES LACUNES ET INTÉGRATION EN TERMES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

En utilisant la théorie des lacunes [4], on peut exprimer les solutions du problème en termes de fonctions elliptiques. On utilise à cette fin, la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass, la fonction elliptique de Backer-Akhiezer ainsi que quelques propriétés de l'équation aux dérivées partielles non-linéaire de Korteweg-de-Vries. Les solutions en termes de fonctions elliptiques que l'on cherche à déterminer sont solutions du problème spectrale suivant :

$$A\psi = \lambda\psi, \tag{10}$$

où $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathcal{U}(x)$, est l'opérateur de Strum-Liouville dépendant du potentiel elliptique

$$\mathcal{U}(x) = 2\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + C, \tag{11}$$

et λ est un paramètre spectral. Ici $\psi = \psi(x, \lambda)$ est un vecteur propre (fonction elliptique de Backer-Akhiezer) de l'opérateur A, $\wp$ est la fonction elliptique de Weierstrass, C est une constante et $x_1, ..., x_N$ appartiennent au lieu

$$\Delta = \left\{ (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{C}^N : \ \sum_{i \neq j} \wp'(x_i - x_j) = 0, \ x_i \neq x_j, \ j = 1, ..., N \right\}.$$

La géométrie du lieu Δ a été étudiée par plusieurs auteurs [2]. On sait que Δ est non vide pour $N = \dfrac{g(g+1)}{2}$, où g est le nombre de lacunes dans le spectre ou ce qui revient au même le genre de la courbe hyperelliptique associée. Il a été démontré dans [4] que si $x_i = x_i(t)$, évolue selon la loi

$$\dot{x}_i = -12 \sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j),$$

alors la fonction (11) est une solution elliptique de l'équation de Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

et il existe une relation avec le système complètement intégrable de Calogero-Moser décrit par le hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - 2\sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j),$$

où y_i, x_i, $i = 1, ..., N$ sont des variables canoniques. Considérons le potentiel associé à l'équation (10) et normalisé à l'aide de son développement au voisinage de $x = 0$ comme suit

$$\mathcal{U}(x) = \frac{6}{x^2} + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 + \alpha_4 x^8 + \cdots \tag{12}$$

Ce potentiel satisfait à l'équation de Novikov [17] :

$$\sum_{i=-1}^{2} c_i \frac{\delta S_i}{\delta u} = 0,$$

où c_i sont des constantes, $\dfrac{\delta S_i}{\delta u}$ est la dérivée variationnelle de la fonctionnelle S_i et

$$S_{-1} = \int u \mathrm{d}x, \qquad S_1 = \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^3 \right) \mathrm{d}x,$$

$$S_0 = \int u^2 \mathrm{d}x, \qquad S_2 = \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{5}{2} u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{5}{2} u^4 \right) \mathrm{d}x,$$

sont des intégrales premières de l'équation de Korteweg-de Vries. Dès lors la courbe algébrique associée au potentiel (12) a la forme [14] :

$$\begin{aligned} w^2 &= z^5 - 35\alpha_1 z^3 - 63\alpha_2 z^2 + \frac{1}{2}\left(567\alpha_1^2 + 297\alpha_3\right) z \\ &\quad +1377\alpha_1\alpha_2 - 1287\alpha_4, \\ &= \prod_{i=1}^{5} (z - z_i). \end{aligned} \tag{13}$$

On déduit de (8), (9) et de la formule des traces [17], que

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= -\sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_j) - \frac{C}{2}, \\ s_1 s_2 &= 3 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \langle j}}^{N} \wp(x - x_i)\, \wp(x - x_j) - \frac{1}{8} N g_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \langle j}}^{5} z_i z_j + \frac{3C}{2} \sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + \frac{3C^2}{8}, \end{aligned}$$

où $z_1, ..., z_5$ sont les points de branchements de la courbe (13). Nous voulons que la courbe spectrale $\mathcal{H}$ (6) soit associée à la courbe algébrique (13). Soient z_α et z_β deux points distincts sur la courbe (13) lesquels seront substitués aux points de branchements λ_1, λ_2 de la courbe $\mathcal{H}$ (6). En utilisant le système (4), *i.e.*,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \left(\lambda_1 - y_1^2 - y_2^2\right) y_1, \\ \ddot{y}_2 &= \left(\lambda_2 - y_1^2 - y_2^2\right) y_2. \end{aligned}$$

tout en tenant compte des expressions précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - \mathcal{U}(x)\, y_1 &= \left(\lambda_1 - 2\left(z_\alpha + y_\beta\right)\right) y_1, \\ \ddot{y}_2 - \mathcal{U}(x)\, y_2 &= \left(\lambda_2 - 2\left(z_\alpha + y_\beta\right)\right) y_2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

THEOREM 4. *Supposons que* $\lambda_1 = 3z_\alpha + 2z_\beta$ *et* $\lambda_2 = 2z_\alpha + 3z_\beta$ *où* z_α *et* z_β *sont deux points de branchements sur la surface de Riemann d'équation (13). Alors les solutions du système en question sont données par*

$$y_1^2 = \frac{1}{z_{\alpha\beta}} \left\{ \Phi + 2z_\alpha^2 + (3C - 2z_\alpha) \sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + \left(\frac{3C}{4} - z_\alpha \right) C \right\},$$

$$y_2^2 = \frac{-1}{z_{\alpha\beta}} \left\{ \Phi + 2z_\beta^2 + (3C - 2z_\beta) \sum_{i=1}^{N} \wp(x - x_i) + \left(\frac{3C}{4} - z_\beta \right) C \right\},$$

où $z_{\alpha\beta} \equiv z_\alpha - z_\beta$,

$$\Phi \equiv 6 \sum_{1 \le i \langle j \le N} \wp(x - x_i) \wp(x - x_j) - \frac{Ng_2}{4} + \sum_{1 \le i < j \le 5} z_i z_j,$$

et $z_1, ..., z_5$ *sont les points de branchements sur la surface de Riemann (13) et* $\wp$ *est la fonction elliptique de Weierstrass.*

5. COMPLÈTE INTÉGRABILITÉ ALGÉBRIQUE

Pour l'étude des équations différentielles dites algébriquement intégrables au sens d'Adler-Van Moerbeke [1, 9, 11, 14, 15], on demande que les invariants du système différentiel soient polynomiaux (dans des coordonnés adéquates) et que de plus les variétés complexes obtenues en égalant ces invariants polynomiaux à des constantes génériques forment la partie affine d'une variété abélienne (tore complexe algébrique) de telle façon que les flots complexes engendrés par les invariants du système soient des lignes droites sur ces tores complexes.

Le système (4) peut s'écrire sous la forme

$$(14) \qquad X_{H_1}: \quad \dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad x = (y_1, y_2, x_1, x_2)^t,$$

où

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2} \right)^\top, \qquad H = H_1(3), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Le second flot associé à l'intégrale première H_2 (théorème 2) et commutant avec le premier est évidemment régularisé par les équations

$$(15) \qquad X_{H_2}: \quad \dot{x} = J\frac{\partial H_2}{\partial x}, \qquad x = (y_1, y_2, x_1, x_2)^t$$

Considérons les séries de Laurent

$$(16) \qquad y_i = \sum_{j=0}^{\infty} y_i^{(j)} t^{j-1}, \qquad x_i = \dot{y}_i, \qquad i = 1, 2$$

dépendant de trois paramètres libres α, β, γ. En substituant ces développements dans les équations différentielles (14), on voit que les coefficients $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}$,..., satisfont aux équations

$$\begin{aligned} 2y_1^{(0)} &= -(y_1^{(0)})^3 - y_1^{(0)}(y_2^{(0)})^2, \\ 2y_2^{(0)} &= -(y_2^{(0)})^3 - (y_1^{(0)})^2 y_2^{(0)}, \end{aligned} \tag{17}$$

et

$$(L - kI)x^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 1 \\ \text{un polynme en } x^{(1)}, ..., x^{(k)} & \text{pour } k \geq 1 \end{cases} \tag{18}$$

où L est la matrice jacobienne de (17). Le paramètre α s'obtient lors de la résolution de (17) et les deux autres β, γ lors de la résolution de (18). Les séries de Laurent (16) sont explicitement données par

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\alpha}{t} + \frac{1}{6}((\lambda_2 - \lambda_1)\alpha^2 + 2\lambda_2 - 3\lambda_1)\alpha t + \beta t^2 + y_1^{(4)} t^3 + \cdots \\ y_2 &= \frac{\varepsilon i\sqrt{2+\alpha^2}}{t} + \frac{\varepsilon i}{6}((\lambda_2 - \lambda_1)\alpha^2 - \lambda_2)\sqrt{2+\alpha^2}\, t + \frac{\varepsilon i\alpha\beta}{\sqrt{2+\alpha^2}} t^2 + \gamma t^3 + \cdots \end{aligned} \tag{19}$$

$x_1 = \dot{y}_1$, $x_2 = \dot{y}_2$ with $\varepsilon \equiv \pm 1$ and

$$y_1^{(4)} \equiv -\alpha \left(\frac{1}{24} (\lambda_2 - \lambda_1) \left(2 (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha^2 - 3\lambda_1 + \lambda_2\right) + \frac{\varepsilon i \gamma}{\sqrt{(2+\alpha^2)}} \right).$$

La convergence de ces séries est assurée par la méthode des majorantes [12]. En substituant ces séries dans les constantes du mouvement $H_1 = c_1$ and $H_2 = c_2$, on obtient deux relations polynomiales entre α, γ et γ. Le paramètre γ s'élimine de façon linéaire et on obtient une courbe hyperelliptique C d'équation affine :

$$C : \quad \beta^2 = (2 + \alpha^2)(A_1\alpha^6 + A_2\alpha^4 + A_3\alpha^2 + A_4), \tag{20}$$

où $\lambda \equiv \lambda_1 - \lambda_2$, $A_1 \equiv \lambda^3/72$, $A_2 \equiv \lambda^2 (2\lambda_1 - \lambda_2)/36$, $A_3 \equiv \lambda (\lambda\lambda_1 - c_1)/18$, $A_4 \equiv -(\lambda_1 c_1 + c_2)/9$. Les séries de Laurent sont donc paramétrisées par deux copies C_ε $(\varepsilon = \pm 1)$ d'une même courbe hyperelliptique de genre 3. Par ailleurs, l'application

$$\sigma : C \longrightarrow C, \ (\alpha, \beta) \curvearrowright (-\alpha, \beta), \tag{21}$$

est une involution sur C et le quotient $C_0 = C/\sigma$ est une courbe elliptique définie par

$$C_0 : \beta^2 = (2 + \zeta)\left(A_1\zeta^3 + A_1\zeta^2 + A_3\zeta + A_4\right). \tag{22}$$

La courbe C est un revêtement double ramifié sur C_0,

$$\varphi : C \longrightarrow C_0, (\alpha, \beta) \curvearrowright (\zeta, \beta), \tag{23}$$

ramifiée en quatre points couvrant $\zeta = 0$ et ∞. La courbe C peut aussi être vue comme étant un revêtement double non ramifié

$$\pi : C \longrightarrow \Gamma, (\alpha, \beta) \curvearrowright (\zeta, \eta), \tag{24}$$

sur la courbe hyperelliptique Γ de genre 2 suivante :

$$\Gamma : \eta^2 = \zeta (2 + \zeta) \left(A_1\zeta^3 + A_1\zeta^2 + A_3\zeta + A_4 \right). \tag{25}$$

Nous allons tout d'abord rappeler quelques notions sur les variétés abéliennes [8]. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ une variété lisse. Un diviseur $\mathcal{D}$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ est une somme formelle $\mathcal{D} = \sum n_i V_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, d'hypersurfaces irréductibles sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$. L'ensemble de tous les diviseurs sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ forme un groupe abélien. Deux diviseurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont linéairement équivalents si leur différence $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ est le diviseur d'une fonction méromorphe f, que l'on note (f), *i.e.*, $(f) = (f)_0 - (f)_\infty =$ (diviseur des zéros de f) – (diviseur des pôles de f). Nous allons utiliser la même notation $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ pour désigner une variété lisse compactifiant $\mathcal{M}_c(7)$ et par $\mathcal{D}$ le plongement de $C_{+1} + C_{-1}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Considérons une base $1, f_1, ..., f_N$ de l'espace vectoriel

$$L(\mathcal{D}) \equiv \{f : \; f \text{ méromorphe sur } \widetilde{\mathcal{M}}_c \text{ telle que } (f) \geq -\mathcal{D} \; \},$$

des fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ ayant au plus un pôle simple sur $\mathcal{D}$ et l'application projective

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \; p \curvearrowright [1, f_1(p), ..., f_N(p)],$$

car si en p on a $f_i(p) = \infty$, on divise par f_i ayant le pôle le plus élevé en p, ce qui rend tout élément fini. Le théorème de plongement de Kodaira [8] affirme que si le fibré en droite associé au diviseur est positif, alors pour $k \in \mathbb{N}$ les fonctions de $L(k\mathcal{D})$ (*i.e.*, fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ ayant au plus un pôle d'ordre k sur $\mathcal{D}$) plonge de manière lisse $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et d'après le théorème de Chow [8], $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ est une variété algébrique. En fait dans notre cas, $k = 2$ suffit, *i.e.*, le diviseur $2\mathcal{D}$ fournit un plongement lisse dans $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$, *via* les sections méromorphes de $L(2\mathcal{C})$. Posons $\mathcal{S} \equiv 2\mathcal{D}$ et soit $\chi(\mathcal{S}) = \dim L(\mathcal{S})$ la caractéristique d'Euler de $\mathcal{S}$. La formule d'adjonction et le théorème de Riemann-Roch pour les diviseurs sur les surfaces abéliennes [8] impliquent que :

$$g(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\left(K_{\widetilde{\mathcal{M}}_c}.\mathcal{S} + \mathcal{S}.\mathcal{S}\right) + 1,$$

$$\chi(\mathcal{S}) = p_a\left(\widetilde{\mathcal{M}}_c\right) + 1 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{S}.(\mathcal{S} \backslash K_{\widetilde{\mathcal{M}}_c})\right),$$

où $g(\mathcal{S})$ est le genre géométrique de $\mathcal{S}$, $p_a\left(\widetilde{\mathcal{M}}_c\right)$ est le genre arithmétique de $\widetilde{\mathcal{M}}_c$, $K_{\widetilde{\mathcal{M}}_c}$ est le diviseur canonique sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ (*i.e.*, le lieu des zéros d'une 2-forme holomorphe) et $\mathcal{S}.\mathcal{S}$ dénote le nombre de points d'intersection de $\mathcal{S}$ avec $a+\mathcal{S}$ où $a+\mathcal{S}$ est une petite translation par a de $\mathcal{S}$ sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$. Pour une surface abélienne, on a $K_{\widetilde{\mathcal{M}}_c}=0$, $p_a(\widetilde{\mathcal{M}}_c)=-1$ et

$$g(\mathcal{S})-1=\frac{\mathcal{S}.\mathcal{S}}{2}=\chi(\mathcal{S}).$$

En utilisant le théorème de dualité de Kodaira-Serre ([8], p. 153), le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano ([8], p. 154) et un théorème sur les fonctions thêta ([8], p. 317), on montre que :

$$g(\mathcal{S})-1=\dim L(\mathcal{S})=N+1=\delta_1\delta_2, \tag{26}$$

où $\delta_1,\delta_2\in\mathbb{N}^*$, $\delta_1\mid\delta_2$, sont les diviseurs élémentaires de la polarisation de $\widetilde{\mathcal{M}}_c$. Rappelons qu'une métrique kählérienne ou forme de Kähler est une métrique hermitienne (*i.e.*, une 2-forme de type (1,1)) dont la partie imaginaire est fermée. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique kählérienne. Le tore complexe $\mathbb{C}^2/lattice$ muni de la métrique euclidienne $\sum dz_i\otimes d\overline{z}_i$ est une variété kählérienne et il en est de même de toute variété compacte complexe qui peut être plongée dans un espace projectif. Les variétés projectives complexes analytiques sont des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Le théorème de Kodaira peut encore s'énnocer comme suit : Une variété complexe compacte admet un plongement lisse dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la forme de Kähler est de classe entière. Un autre résultat intéressant concernant les variétés kählériennes a été obtenu par Moishezon [16] : une variété complexe kählérienne compacte de dimension n est projective si et seulement si elle admet n fonctions méromorphes indépendantes.

Sur la base de cette motivation, il est facile de trouver un ensemble de fonctions polynomiales $\{1,f_1,...,f_N\}$ dans $L(\mathcal{S})$, *i.e.*, $L(2\mathcal{D})$ tel que le plongement de $\mathcal{S}$ à l'aide de ces fonctions dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ fournit une courbe de genre $N+2$. Un calcul direct, utilisant les développements asymptotiques, montre que l'espace $L(S)$ est engendré par les fonctions suivantes :

$$L(\mathcal{S})=\{1,f_1,...,f_{15}\}, \tag{27}$$

où

$$f_1=y_1=\frac{\alpha}{t}+o\left(t\right), \qquad f_2=y_2=\frac{\varepsilon i\sqrt{2+\alpha^2}}{t}+o\left(t\right),$$

$$f_3=x_1=-\frac{\alpha}{t^2}+o\left(t\right), \qquad f_4=x_2=-\frac{\varepsilon i\sqrt{2+\alpha^2}}{t^2}+o\left(t\right),$$

$$f_5=f_1^2=\frac{\alpha^2}{t^2}+o\left(t\right), \qquad f_6=f_2^2=-\frac{2+\alpha^2}{t^2}+o\left(t\right),$$

$$f_7 = f_1 f_2 = i\alpha\varepsilon \frac{\sqrt{(2+\alpha^2)}}{t^2} + o\left(t\right),$$
$$f_8 = f_1 f_4 - f_2 f_3 = -i\alpha\varepsilon\sqrt{(2+\alpha^2)}\frac{a_1 - a_2}{t} + o\left(t\right),$$
$$f_9 = f_1 f_8 = -i\frac{\alpha^2}{t^2}\varepsilon\sqrt{(2+\alpha^2)}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) + o\left(t\right),$$
$$f_{10} = f_2 f_8 = \frac{2+\alpha^2}{t^2}\alpha\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) + o\left(t\right),$$
$$f_{11} = f_8^2 = -\alpha^2\left(2+\alpha^2\right)\frac{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)^2}{t^2} + o\left(t\right),$$
$$f_{12} = \left(f_5 + f_6\right) f_8 - 2\left(\lambda_1 f_1 f_4 - \lambda_2 f_2 f_3\right) = \frac{12 i\varepsilon\beta}{t^2\sqrt{(2+\alpha^2)}} + o\left(t\right),$$
$$f_{13} = \left(f_5 + f_6\right) f_1 f_2 + 2 f_3 f_4 = -i\alpha\varepsilon\sqrt{(2+\alpha^2)}\frac{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\alpha^2 + 2a_1}{t^2} + o\left(t\right),$$
$$f_{14} = f_3 f_8 - \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) f_1 f_7 = \frac{6 i\alpha\varepsilon\beta}{t^2\sqrt{(2+\alpha^2)}} + o\left(t\right),$$
$$f_{15} = f_4 f_8 - \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) f_2 f_7 = -\frac{6\beta}{t^2} + o\left(t\right).$$

A l'aide de ces fonctions $1, f_1, ..., f_{15}$, on plonge chacune de ces courbes C_{+1} et C_{-1} dans $\mathbb{P}^{15}\left(\mathbb{C}\right)$. Ainsi plongée, ces courbes ont deux points en commun $s_1 \equiv \left(\alpha = i\sqrt{2}, \beta = 0\right)$ et $s_2 \equiv \left(\alpha = -i\sqrt{2}, \beta = 0\right)$, en lequels elles sont tangentes. Le diviseur $\mathcal{D} = C_{+1} + C_{-1}$ obtenu ainsi est de genre 5 et donc $\mathcal{S} = 2\mathcal{D}$ est de genre 17, satisfaisant la condition (26). Nous allons maintenant attacher la partie affine de l'intersection (7) des deux invariants afin d'obtenir une surface lisse compacte et connexe dans $\mathbb{P}^{15}\left(\mathbb{C}\right)$. Plus précisément, les orbites du champ de vecteurs (14) passant par $\mathcal{S}$ forment une surface lisse Σ autour de $\mathcal{S}$ telles que : $\Sigma \setminus \mathcal{S} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_c$ et la variété $\widetilde{\mathcal{M}}_c = \mathcal{M}_c \cup \Sigma$ est lisse compacte et connexe. En effet, soit

$$\psi(t,p) = \left\{x(t) = (y_1(t), y_2(t), x_1(t), x_2(t)) : t \in \mathbb{C}, 0\langle|t|\left\langle\varepsilon\right\}\right.,$$

du champ de vecteurs (14) passant par le point $p \in \mathcal{S}$. Soit $\Sigma_p \subset \mathbb{P}^{15}\left(\mathbb{C}\right)$ l'élément de surface formé par le diviseur $\mathcal{S}$ et l'orbite passant par p, et soit $\Sigma \equiv \bigcup_{p\in\mathcal{S}} \Sigma_p$. Considérons la courbe $\mathcal{S}' = \mathcal{H} \cap \Sigma$ où $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^{15}\left(\mathbb{C}\right)$ est un hyperplan transverse à la direction du flot. Si $\mathcal{S}'$ est lisse, alors d'après le théorème des fonctions implicites la surface Σ est lisse. Par contre, si $\mathcal{S}'$ est singulière en 0, alors Σ serait singulière le long de la trajectoire (axe des t) laquelle pénétre immédiatement dans la partie affine $\widetilde{\mathcal{M}}_c$. Dès lors, $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ serait singulière, ce qui est absurde car $\mathcal{M}_c$ est la fibre d'un morphisme de $\mathbb{C}^4$ dans $\mathbb{C}^2$ et donc lisse pour presque toutes les constantes c_i. Ensuite, soit $\overline{\mathcal{M}}_c$ la fermeture projective de $\mathcal{M}_c$ dans $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$, soit $X = (X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ et désignons par $I = \overline{\mathcal{M}}_c \cap \{X_0 = 0\}$ le lieu à l'infini. Considérons l'application

$$\overline{\mathcal{M}}_c \subseteq \mathbb{P}^4(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C}),\ X \curvearrowright f(X),$$

où $f = (1, f_1, ..., f_{15}) \in L(\mathcal{S})$ et soit $\widetilde{\mathcal{M}}_c = f(\overline{\mathcal{M}}_c)$. Dans le voisinage $V(p) \subseteq \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$ de p, on a $\Sigma_p = \widetilde{\mathcal{M}}_c$ et $\Sigma_p \setminus \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_c$. Sinon, il existerait un élément de surface $\Sigma_p' \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}_c$ tel que :

$$\Sigma_p \cap \Sigma_p' = \text{axe des } t,$$

$$\text{orbite } \psi(t,p) = \text{axe des } t \backslash\ p \subseteq \mathcal{M}_c,$$

et donc $\mathcal{M}_c$ serait singulière le long de l'axe des t ce qui est impossible. Puisque la variété $\overline{\mathcal{M}}_c \cap \{X_0 \neq 0\}$ est irréductible et puisque la section hyperplane générique $\mathcal{H}_{gen.}$ de $\overline{\mathcal{M}}_c$ est aussi irréductible, toutes les sections hyperplanes sont connexes et donc I est aussi connexe. Maintenant, considérons le graphe $\Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^4(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^{15}(C)$ de l'application f, qui est irréductible avec $\overline{\mathcal{M}}_c$. Il résulte de l'irréductibilité de I qu'une section hyperplane générique $\Gamma_f \cap \{\mathcal{H}_{gen.} \times \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})\}$ est irréductible, donc la section spéciale hyperplane $\Gamma_f \cap \{\{X_0 = 0\} \times \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})\}$ est connexe et dès lors l'application projective

$$proj_{\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})}\{\Gamma_f \cap \{\{X_0 = 0\} \times \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})\}\} = f(I) \equiv \mathcal{S},$$

est connexe. Dès lors, la variété $\mathcal{M}_c \cup \Sigma = \overline{\mathcal{M}}_c$ est compacte, connexe et admet un plongement lisse dans $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$ *via* f.

Nous allons voir que $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ est une surface abélienne équipée de deux champs de vecteurs partout indépendants et commutant entre eux. En effet, soit g^{τ_1} et g^{τ_2} les flots engendrés respectivement par les champs de vecteurs (14) et (15). Pour $p \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, $g^{\tau_1}(p), \forall \tau_1, 0 < |\tau_1| < \varepsilon$, est bien défini et $g^{\tau_1}(p) \in \mathcal{M}_c$. Ensuite, on peut définir g^{τ_2} sur $\mathcal{M}_c$ par

$$g^{\tau_2}(q) = g^{-\tau_1} g^{\tau_2} g^{\tau_1}(q), \qquad q \in U(p) = g^{-\tau_1}(U(g^{\tau_1}(p))),$$

où $U(p)$ est un voisinage de p. Par commutativité on peut voir que g^{τ_2} est indépendant de τ_1;

$$g^{-\tau_1-\varepsilon_1} g^{\tau_2} g^{\tau_1+\varepsilon_1}(q) = g^{-\tau_1} g^{-\varepsilon_1} g^{\tau_2} g^{\tau_1} g^{\varepsilon_1} = g^{-\tau_1} g^{\tau_2} g^{\tau_1}(q).$$

Nous affirmons que $g^{\tau_2}(q)$ est holomorphe en dehors de S. Ceci parce que $g^{\tau_2} g^{\tau_1}(q)$ est holomorphe en dehors de $\mathcal{S}$ et que g^{τ_1} est holomorphe dans $U(p)$ et applique $U(p)$ de manière biholomorphe sur $U(g^{\tau_1}(p))$. Maintenant, étant donné que les flots g^{τ_1} et g^{τ_2} sont holomorphes et indépendants sur $\mathcal{S}$, on peut montrer en utilisant un raisonnement similaire à celui du théorème d'Arnold-Liouville [3] que $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ est un tore complexe $\mathbb{C}^2/lattice$ et donc en particulier $\widetilde{\mathcal{M}}_c$

est une variété kählérienne. Et ce sera fait, en considérant le difféomorphisme local

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_c,\ (\tau_1, \tau_2) \curvearrowright g^{\tau_1} g^{\tau_2}(p),$$

pour $p \in \mathcal{M}_c$, une origine fixe. Le sous-groupe additif $\{ (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{C}^2 : g^{\tau_1} g^{\tau_2}(p) = p\}$ est un réseau (lattice) de $\mathbb{C}^2$, d'où $\mathbb{C}^2/lattice \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_c$ est un difféomorphisme biholomorphe et $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ est une variété kählérienne équipée de la métrique de Kähler suivante : $d\tau_1 \otimes d\overline{\tau}_1 + d\tau_2 \otimes d\overline{\tau}_2$. On sait qu'une variété complexe kählérienne compacte de dimension n est projective si et seulement si elle admet n fonctions méromorphes indépendantes. En fait, ici on a $\widetilde{\mathcal{M}}_c \subseteq \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$. Donc $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ est une variété projective et un tore complexe $\mathbb{C}^2/lattice$ et par conséquent c'est une variété abélienne en vertu du théorème de Chow [8]. Finalement, on le résultat suivant :

Theorem 5. *Soit $\mathcal{M}_c$ (7) la variété affine invariante définie en égalant les deux invariants H_1 et H_2 (avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$) du flot (14), à des constantes génériques. Alors,*

a) *La variété $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ qui complète $\mathcal{M}_c$ est une variété kählérienne équipée de la métrique de Kähler $d\tau_1 \otimes d\overline{\tau}_1 + d\tau_2 \otimes d\overline{\tau}_2$.*

b) *$\mathcal{M}_c$ est la partie affine d'une surface abélienne $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ avec $\widetilde{\mathcal{M}}_c \setminus \mathcal{M}_c = \mathcal{D}$ où $\mathcal{D} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$ est de genre 5 et consiste en deux copies $\mathcal{C}_\varepsilon$ $(\varepsilon = \pm 1)$ de la courbe hyperelliptique $\mathcal{C}$ (20) de genre 3. La courbe $\mathcal{C}$ est un revêtement (23) double ramifié en quatre points d'une courbe elliptique $\mathcal{C}_0$ (22) et peut aussi être vue comme un revêtement (24) double non ramifié d'une courbe hyperelliptique Γ (25) de genre 2. De plus, les flots hamiltoniens engendrés par les champs de vecteurs X_{H_1} (14) et X_{H_2} (15) sont des lignes droites sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$.*

c) *Les 16 fonctions : 1 , $f_1, ..., f_{15}$ (27) forment une base de l'espace vectoriel $L(2\mathcal{D})$ des fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ ayant au plus un pôle double sur $\mathcal{D}$. En outre, l'application*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c \simeq \mathbb{C}^2/Lattice \longrightarrow \mathbb{P}^{15}(C) \ \ , \ \ (t_1, t_2) \curvearrowright [(1, f_1(t_1, t_2), ..., f_{15}(t_1, t_2))],$$

est un plongement de $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ dans $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$.

6. SURFACE ABÉLIENNE CARACTÉRISÉE EN TANT QUE VARIÉTÉ DE PRYM ET VARIÉTÉ DE JACOBI

Theorem 6. *La surface abélienne $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ qui complète la variété affine $\mathcal{M}_c$ peut être identifiée à la duale d'une variété de Prym :*

$$\widetilde{\mathcal{M}}_c = \Pr ym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)^{\vee}.$$

En outre, le système en question se linéarise sur cette variété de Prym.

Démonstration : Soit $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2)$ une base de cycles de $H_1(C, \mathbb{Z})$ telle que : $\sigma(a_0) = a_1$, $\sigma(b_0) = b_1$, $\sigma(a_2) = -a_2$, $\sigma(b_2) = -b_2$ pour l'involution σ (21). Soit $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ une base de différentielles holomorphes sur la courbe C (20) où

$$\omega_0 = \frac{\alpha d\alpha}{\beta}, \qquad \omega_1 = \frac{\alpha^2 d\alpha}{\beta}, \qquad \omega_2 = \frac{d\alpha}{\beta} \tag{28}$$

Evidemment $\sigma^*(\omega_0) = \omega_0$, $\sigma^*(\omega_k) = -\omega_k$, $k = 1, 2$. Rappelons que l'involution σ échangeant les feuillets du revêtement double $C \longrightarrow C_0$, identifie C au quotient C/σ. Cette involution induit une involution $\sigma : Jac(C) \longrightarrow Jac(C)$ et modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne $Jac(C)$ se décompose en deux parties : une partie paire à savoir C_0 et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym $Prym(C/C_0)$ (voir par exemple [1, 10, 13] pour de plus amples informations sur les variétés de Prym). Considérons la matrice des périodes Λ de $Jac(\mathcal{C})$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_0(a_2) & \omega_0(b_2) & \omega_0(a_0) & \omega_0(b_0) & \omega_0(a_1) & \omega_0(b_1) \\ \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) \\ \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & \omega_2(a_1) & \omega_2(b_1) \end{pmatrix}$$

où $\omega_k(a_j) = \int_{a_j} \omega_k$, $\omega_k(b_j) = \int_{b_j} \omega_k$, $0 \le k, j \le 2$, sont les périodes de ω_k sur les cycles a_j, b_j, $0 \le j \le 2$. Notons que : $\omega_0(a_2) = \omega_0(b_2) = 0$ et $\omega_0(a_1) = \omega_0(\sigma(a_0)) = \sigma^*(\omega_0(a_0)) = \omega_0(a_0), \omega_k(a_1) = \omega_k(\sigma(a_0)) = \sigma^*(\omega_k(a_0)) = -\omega_k(a_0)$, $k = 1, 2$, $\omega_0(b_1) = \omega_0(b_0)$, $\omega_k(b_1) = -\omega_k(b_0)$, $k = 1, 2$ et dès lors

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_0) & \omega_0(b_0) & \omega_0(a_0) & \omega_0(b_0) \\ \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & -\omega_1(a_0) & -\omega_1(b_0) \\ \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & -\omega_2(a_0) & -\omega_2(b_0) \end{pmatrix}$$

En utilisant quelques opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient les matrices suivantes :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_0) & \omega_0(b_0) & 2\omega_0(a_0) & 2\omega_0(b_0) \\ \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & 0 & 0 \\ \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_0(a_0) & \omega_0(b_0) & 0 & 0 \\ \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) & \omega_1(a_1) & \omega_1(b_1) & 2\omega_1(a_0) & 2\omega_1(b_0) \\ \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & 2\omega_2(a_0) & 2\omega_2(b_0) \end{pmatrix}$$

Les matrices des périodes de la courbe elliptique $\mathcal{C}_0$ et de la variété de Prym $\Pr ym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ sont respectivement $(2\omega_0(a_0) \quad 2\omega_0(b_0))$ et

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) & 2\omega_1(a_0) & 2\omega_1(b_0) \\ \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2) & 2\omega_2(a_0) & 2\omega_2(b_0) \end{pmatrix} \tag{29}$$

En utilisant les solutions de Laurent, on montre que les différentielles dt_1 et dt_2 correspondants aux flots engendrés respectivement par $H = H_1$ et H_2 et restreintes à la courbe $\mathcal{C}$ (20), se ramènent aux deux différentielles sur $\mathcal{C}$ suivantes :

$$
\begin{aligned}
dt_1|_{\mathcal{C}} &= \frac{\alpha^2 d\alpha}{\beta} = \omega_1, \\
dt_2|_{\mathcal{C}} &= \frac{d\alpha}{\beta} = \omega_2.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Soit $L_{\Omega^*} = \left\{ \sum_{k=1}^{4} n_k \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix} (\nu_k) : n_k \in \mathbb{Z} \right\}$ le réseau associé à la période des matrices

$$
\Omega^\vee = \begin{pmatrix} dt_1(\nu_1) & dt_1(\nu_2) & dt_1(\nu_3) & dt_1(\nu_4) \\ dt_2(\nu_1) & dt_2(\nu_2) & dt_2(\nu_3) & dt_2(\nu_4), \end{pmatrix}
$$

où $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ est une base de $H_1(\widetilde{\mathcal{M}}_c, \mathbb{Z})$ et soit

$$
\widetilde{\mathcal{A}}_c \to \mathbb{C}^2 / L_{\Omega^*} : p \curvearrowright \int_{p_0}^{p} \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix},
$$

l'application uniformisante. D'après le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes ([8], p. 156), l'application $H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\widetilde{\mathcal{M}}_c, \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion $\mathcal{C} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_c$ est surjective et par conséquent on peut trouver 4 cycles $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sur la courbe $\mathcal{C}$ tels que :

$$
\Omega^\vee = \begin{pmatrix} \omega_1(\nu_1) & \omega_1(\nu_2) & \omega_1(\nu_3) & \omega_1(\nu_4) \\ \omega_2(\nu_1) & \omega_2(\nu_2) & \omega_2(\nu_3) & \omega_2(\nu_4), \end{pmatrix}
$$

et $L_{\Omega^*} = \left\{ \sum_{k=1}^{4} n_k \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} (\nu_k) : n_k \in \mathbb{Z} \right\}$. Les cycles $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sur C que l'on cherche à déterminer sont a_2, b_2, a_0, b_0 et ils engendrent $H_1(\widetilde{V}_c, \mathbb{Z})$ de telle façon que :

$$
\Omega^\vee = \begin{pmatrix} \omega_1(a_0) & \omega_1(b_0) & \omega_1(a_2) & \omega_1(b_2) \\ \omega_2(a_0) & \omega_2(b_0) & \omega_2(a_2) & \omega_2(b_2), \end{pmatrix} \tag{31}
$$

est une matrice de Riemann. Puisque Ω (29) est la période des matrices de $\Pr ym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$, alors $\Omega^\vee$ (31) est la période des matrices de la variété de Prym duale $\Pr ym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)^\vee$. Par conséquent, $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ et $\Pr ym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)^\vee$ sont deux variétés abéliennes analytiquement isomorphes au même tore complexe $\mathbb{C}^2/L_{\Omega^*}$. D'après le théorème de Chow, $\widetilde{\mathcal{A}}_c$ et $\Pr ym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)^\vee$ sont alors algébriquement isomorphes. En utilisant les différentielles (28), les solutions du problème s'écrivent

$$
\int_{s_1(0)}^{s_1(t)} \omega_1 + \int_{s_2(0)}^{s_2(t)} \omega_1 = \mu_1 t,
$$

$$\int_{s_1(0)}^{s_1(t)} \omega_2 + \int_{s_2(0)}^{s_2(t)} \omega_2 = \mu_2 t,$$

pour certaines coordonnées appropriées μ_1 and μ_2. $\square$

Nous avons montré dans la section 2 que la linéarisation du système (4) peut se faire à l'aide des fonctions hyperelliptiques de genre deux. Nous allons voir (sans faire référence à la représentation de Lax comme dans la section 2), que l'on peut utiliser les résultats obtenus dans la section 3 pour montrer que la linéarisation du système en question se fait sur la variété jacobienne $Jac\,(\Gamma)$ de la courbe hyperelliptique de genre deux Γ (25). Rappelons que les solutions de Laurent (16) restreintes à la surface $\mathcal{M}_c$ (7) sont paramétrées par deux copies $\mathcal{C}_{+1}$ et $\mathcal{C}_{-1}$ d'une même courbe hyperelliptique $\mathcal{C}$ (20) de genre 3. Cette dernière est un revêtement double ramifié le long d'une courbe elliptique $\mathcal{C}_0$ (22) un revêtement double non ramifié le long d'une courbe hyperelliptique Γ (25) de genre 2. Le tore $\widetilde{\mathcal{M}}_c$ peut aussi être vu comme étant un revêtement double non ramifié de la variété jacobienne $Jac(\Gamma)$ et le système (4) se linéarise à l'aide de fonctions hyperelliptiques de genre 2. Les différentielles dt_1 et dt_2, correspondants aux flots (14) et (15), restreintes à la courbe C, descendent à Γ. En effet, utilisant (28)

$$\begin{aligned} dt_1|_{\mathcal{C}} &= \omega_1 = \frac{\alpha^2 d\alpha}{\beta} = \frac{\zeta d\zeta}{\eta}, \\ dt_2|_{\mathcal{C}} &= \omega_2 = \frac{d\alpha}{\beta} = \frac{d\zeta}{\eta}, \end{aligned} \tag{32}$$

on obtient les deux différentielles sur Γ. L'application φ (23) se prolonge en une application $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathcal{M}}_c \longrightarrow Jac(\Gamma)$. Soit $|\mathcal{D}|$ le système linéaire, *i.e.*, l'ensemble des diviseurs positifs linéairement équivalents à $\mathcal{D}$. On a $|\mathcal{D}| = \mathbb{P}\,(L\,(\mathcal{D}))$; associant à chaque fonction non nulle $f \in L\,(\mathcal{D})$. Rappelons qu'en général une variété abélienne $\widetilde{\mathcal{M}}_c \simeq \mathbb{C}^m/Lattice$ a un involution naturelle τ, induite par $(z_1, \ldots, z_m) \curvearrowright (-z_1, \ldots, -z_m)$ in $\mathbb{C}^m$. Ses points fixes sont exactement les 2^{2m} demi-périodes de $\widetilde{\mathcal{M}}_c$. Le quotient $\widetilde{\mathcal{M}}_c/\tau$ est appelé la surface de Kummer. En particulier, la surface de Kummer K de $Jac\,(\Gamma)$ peut être considérée comme l'image $\psi_{\widetilde{\varphi}^*|2\Gamma|} : \widetilde{\mathcal{M}}_c \to \mathbb{P}^3\,(\mathbb{C})$ avec $\widetilde{\varphi}^*\,|2\Gamma| \subset |2C|$. Puisque la courbe Γ est hyperelliptique de genre 2, elle a 6 points distinctes de Weierstrass. Choisissons un point de Weierstrass P sur la courbe Γ et des coordonnées $[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3]$ pour $\mathbb{P}^3\,(\mathbb{C})$ tels que : $\psi_{\widetilde{\varphi}^*|2\Gamma|}\,(P) = [0,0,0,1]$. Dès lors, ce point sera un point singulier pour la surface de Kummer K de l'équation

$$a\,(Z_0, Z_1, Z_2)\;\; Z_3^2 + b\,(Z_0, Z_1, Z_2)\;\; Z_3 + c\,(Z_0, Z_1, Z_2)\;\; = 0,$$

où a, b et c sont des polynmes de degré respectivement $2, 3$ et 4. Après une transformation projective qui fixe $[0,0,0,1]$ on peut supposer que $a\,(Z_0, Z_1, Z_2) =$

$Z_1^2 - 4Z_0Z_2$. Nous pouvons construire une application (algébrique) de $\mathcal{M}_c$ à la variété de Jacobi $Jac\,(\Gamma)$:

$$\mathcal{M}_c \to Jac\,(\Gamma)\,,\ p \in \mathcal{M}_c \curvearrowright (\zeta_1 + \zeta_2) \in Jac\,(\Gamma)\,,$$

et les flots engendrés par les constantes du mouvement sont des lignes droites sur $Jac\,(\Gamma)$, *i.e.*, les équations de linéarisation sont donnés par

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{\zeta_i(0)}^{\zeta_i(t)} \omega_k = c_k t,\ 0 \leq k \leq 2,$$

où ω_1, ω_2 (30) engendre l'espace (de dimension 2) des différentielles holomorphes sur la courbe Γ et ζ_1, ζ_2 sont deux variables appropriées données par

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\left(-Z_1 + \sqrt{a\,(Z_0, Z_1, Z_2)}\right),$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2}\left(-Z_1 - \sqrt{a\,(Z_0, Z_1, Z_2)}\right),$$

et sont algébriquement liées à ceux d'origine, pour lequel l'équation de Hamilton-Jacobi peut être résolue par séparation des variables.

REFERENCES

[1] M. Adler and P. van Moerbeke, *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras.* A series of modern surveys in mathematics **47**, Springer-Verlag, 2004.

[2] H. Airault, H.P. Mc Kean and J. Moser, *Rational and elliptic solutions of the KdV equation and a related many-body problem.* Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), 94–148.

[3] V.I. Arnold, *Mathematical methods in classical mechanics.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1978.

[4] A.I. Belokolos, V.Z. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations.* Springer-Verlag 1994.

[5] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov and A.T. Fomenko, *Modern geometry. Methods and applications.* Parts I, II, III. Springer-Verlag, 1984, 1985, 1990.

[6] J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, V.B. Kuznetsov and D.V. Leykin, *Linear r-matrix algebra for systems separable in parabolic coordinates.* Phys. Lett. A **180** (1993), 208–214.

[7] J.C. Eilbeck, V.Z. Enolskii, V.B. Kuznetsov and A.V. Tsiganov, *Linear r-matrix algebra for classical separable systems.* J. Phys. A.: Math. Gen. **27** (1994), 567–578.

[8] P.A. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience 1978.

[9] A. Lesfari, *Abelian surfaces and Kowalewski's top.* Ann. Scient. École Norm. Sup. Paris, 4e série, **21** (1988), 193–223.

[10] A. Lesfari, *Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym.* Pacific J. Math. **212** (2003), *1*, 125–132.

[11] A. Lesfari, A*belian varieties, surfaces of general type and integrable systems.* Beiträge Algebra Geom., **48** (2007), *1*, 95–114.

[12] A. Lesfari, *Etude des solutions méromorphes d'équations différentielles.* Ren. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **65** (2007), *4*, 451–464.

[13] A. Lesfari, *Prym varieties and applications.* J. Geom. Phys. **58** (2008), 1063–1079.

[14] A. Lesfari, *Integrable systems and complex geometry.* Lobachevskii Journal of Mathematics, **30**, *4* (2009), 292–326.
[15] A. Lesfari, *Algebraic integrability : the Adler-van Moerbeke approach.* Regul. Chaotic Dyn. **16** (2011), *3–4*, 187–209.
[16] B.G. Moishezon, *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions.* Amer. Math. Soc. Transl. **63** (1967), 51–177.
[17] S.P. Novikov, *The periodic problem for Korteweg-de Vries equation.* Funct. Anal. Pril. **8** (1974), 53–66.
[18] P. Vanhaecke, *Integrable systems in the realm of algebraic geometry.* Lecture Notes in Math., 1638, Springer-Verlag, Second edition 2001.

Received 22 August 2012

University of Chouaïb Doukkali,
Faculty of Sciences,
Department of Mathematics,
B.P. 20, El-Jadida, Morocco
lesfariahmed@yahoo.fr